УДК 62-755

А.Н. ГОРБЕНКО

Керченский государственный морской технологический университет

ОБОБЩЕННОЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРНЫХ МАШИН С АВТОБАЛАНСИРОМ

В работе рассматривается проблема нелинейной устойчивости многомассового автобалансирующего устройства пассивного типа, установленного на произвольную роторную машину. На основе уравнений возмущенного движения с суммарными обобщенными координатами автобалансира получено обобщенное характеристическое уравнение для анализа устойчивости механической системы. Предложена процедура понижения порядка характеристического уравнения для последующего приближенного анализа. Получены обобщенные формулы, позволяющие оценить спектр собственных чисел и область устойчивости автобалансировки роторной машины. Рассмотрены частные случаи.

Ключевые слова: *роторная машина, ротор, автобалансировка, пассивный автобалансир, устойчивость, характеристическое уравнение.*

1. Постановка проблемы. Анализ существующих исследований. Цель работы.

Среди способов снижения вибрации роторных машин (РМ) находят применение автобалансирующие устройства (АБУ) пассивного типа (см. например [1-7] и др.). При определенных условиях компенсирующие грузы (КГ) АБУ автоматически уравновешивают ротор, устраняя силы от дисбалансов и снижая вибрацию машины в процессе ее работы. Подобные устройства относятся к существенно нелинейным многомассовым механическим системам (МС) с нетривиальными свойствами, что вызывает трудности их исследования.

В работах [5, 7] на основе единого общего подхода получены обобщенные уравнения движения роторных машин с многомассовым автобалансиром. В данной статье развиваются результаты этих работ. Целью статьи является получение и анализ обобщенного характеристического уравнения (ХУ), определяющего области устойчивости автобалансировки роторных машин с автобалансиром.

2. Уравнения возмущенного движения

Рассматриваемые МС состоят из обобщенной роторной машины (ОРМ) и многомассового автобалансира пассивного типа. Термин «обобщенная роторная машина», введенный в работе [7], здесь используется для того, чтобы подчеркнуть общность подхода и получаемых результатов. Взаимосвязь подсистемы ОРМ и подсистемы АБУ осуществляется через точку А крепления автобалансира к ротору.

Обобщенные уравнения возмущенного движения МС «ОРМ-АБУ» в режиме автобалансировки в неподвижной системе координат имеют вид [5, 7]:

$$\begin{cases} [M_\Sigma]\{\ddot{q}\}+[H]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}+mR\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{\ddot{f}_a\}\end{Bmatrix}=\{0\}; \\ \{\ddot{\psi}\}+h_\varphi\{\dot{\psi}\}+\dfrac{1}{2R}[d_c][T]^{-1}\{\ddot{q}_a\}=\{0\}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\{q\}=\left(\{q_r\}^T \quad \{q_a\}^T\right)^T=q_i\ ,\ \ i=1,2,\ldots,n_r\ ;$$

$$\{q_r\}=q_{ir}\ ,\ \ i_r=1,2,\ldots,n_b\ ;\ \{q_a\}=\begin{Bmatrix}x_A\\ y_A\end{Bmatrix};$$

$$\{f_a\}=[T]\{\psi\};\ \{\ddot{f}_a\}=[T]\left(\{\ddot{\psi}\}+2\omega[E_c]\{\dot{\psi}\}-\omega^2\{\psi\}\right);$$

$$[d_c]=2\sum_{j=1}^{n}\begin{bmatrix}\sin^2\alpha_j & -\sin\alpha_j\cos\alpha_j\\ -\sin\alpha_j\cos\alpha_j & \cos^2\alpha_j\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(n-D_c) & -D_s\\ -D_s & (n+D_c)\end{bmatrix};$$

$$D_c=\sum_{j=1}^{n}\cos 2\alpha_j\ ;\ D_s=\sum_{j=1}^{n}\sin 2\alpha_j\ ;\ [E_c]=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix};$$

$$[T(t)]=\begin{bmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix};\ [T]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix};$$

$[M_\Sigma]$, $[H]$, $[K]$ – квадратные матрицы инерции, демпфирования (и/или гироскопичности) и жесткости РМ размером (n_r, n_r), где $n_r= n_b+2$;

ω – угловая скорость вращения ротора;

n, m, R – количество КГ в АБУ, масса одного КГ и радиус окружности его движения в АБУ;

h_φ – коэффициент демпфирования движения КГ в АБУ, c^{-1};

α_j – постоянный угол расположения j-го КГ в АБУ при идеальной автобалансировке.

Уравнения (1) составлены относительно независимых вариаций обобщенных координат (ОК) МС: вектора $\{q\}$ ОК ОРМ и вектора $\{\psi\}$ суммарных ОК автобалансира. В свою очередь в структуре вектора $\{q\}$ ОК ОРМ отдельно выделяется подвектор $\{q_a\}$ текущих координат точки А крепления АБУ к валу ротора, характеризующие её поперечные отклонения. Отметим, что по сравнению с обозначениями в [7] здесь опущен символ вариации «δ» для упрощения формы записи.

Суммарные обобщенные координаты АБУ представляют собой смещение общего центра масс всех КГ АБУ от его положения при идеальной (синхронной) автобалансировке. Эти суммарные ОК АБУ в проекциях на координатные оси, вращающиеся вместе с ротором, имеют вид:

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \psi_s \\ \psi_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j \sin\alpha_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j \cos\alpha_j \end{Bmatrix}, \qquad (2)$$

а в проекциях на неподвижные координатные оси:

$$\{f_a\} = \begin{Bmatrix} f_{as} \\ f_{ac} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j \sin(\omega t + \alpha_j) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \psi_j \cos(\omega t + \alpha_j) \end{Bmatrix}. \qquad (3)$$

Связь между ними:

$$\{f_a\} = [T]\{\psi\} \text{ или } \{\psi\} = [T]^{-1}\{f_a\}. \qquad (4)$$

Уравнения (1) движения МС выписаны с использованием ОК АБУ $\{\psi\}$ в форме (2). Эти же уравнения могут быть выписаны и через суммарные ОК АБУ $\{f_a\}$ в форме (3), для чего следует выполнить замену переменных (4).

Тогда обобщенная система уравнений возмущенного движения МС примет вид [5, 7]:

$$\begin{gathered} [M_\Sigma]\{\ddot{q}\} + [H]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + mR\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\ddot{f}_a\} \end{Bmatrix} = \{0\}; \\ \{\ddot{f}_a\} + [H_\varphi]\{\dot{f}_a\} - [K_\varphi]\{f_a\} + \\ + \frac{1}{2R}[T][d_c][T]^{-1}\{\ddot{q}_a\} = \{0\}, \end{gathered} \qquad (5)$$

где

$$[H_\varphi] = \begin{bmatrix} h_\varphi & 2\omega \\ -2\omega & h_\varphi \end{bmatrix}; \ [K_\varphi] = \begin{bmatrix} \omega^2 & -h_\varphi\omega \\ h_\varphi\omega & \omega^2 \end{bmatrix}.$$

Уравнения возмущенного движения (1) или (5) определяют области устойчивости автобалансировки МС. Количество уравнений в них равно ($n_r + 2$), независимо от числа n КГ в АБУ.

3. Переход к автономным уравнениям возмущенного движения

Приведенные выше системы дифференциальных уравнений движения неавтономны и содержат периодические коэффициенты. Исследование устойчивости таких уравнений сталкивается с повышенными трудностями. Методы общей теории устойчивости движения для таких задач отличаются высокой сложностью и низкой эффективностью. Поэтому в подобных ситуациях обычно пытаются каким-либо способом преобразовать исходную систему к системе автономных уравнений с постоянными коэффициентами. Согласно Ляпунову такое преобразование всегда существует, хотя общего способа его осуществления к настоящему времени не получено.

В данном разделе рассматриваются возможности перехода к автономным уравнениям для общего случая МС ОРМ с АБУ. В качестве исходных будем использовать уравнения движения (1).

Переход к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами осуществляется путем некоторой замены переменных. В силу отсутствия общего способа формирования матрицы перехода, попытаемся «сконструировать» один из ее вариантов, исходя из следующих соображений.

В уравнения возмущенного движения (1) периодические коэффициенты входят в виде матриц $[T]$ и $[T]^{-1}$, представляющих собой матрицы перехода от неподвижных координат к системе координат, вращающейся синхронно с ротором, и обратно. Причем преобразованию фактически подвергаются только переменные ОРМ (в общем случае векторы $\{q_a\}$ и $\{q_r\}$). Обобщенные координаты АБУ $\{\psi\}$ отсчитываются во вращающейся системе, и поэтому нет необходимости их преобразовывать.

С учетом общей структуры уравнений (1) и указанных особенностей, естественным образом будем предполагать, что необходимая замена переменных ОРМ представляет собой:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q_r\} \\ \{q_a\} \end{Bmatrix} = [T_s]\{w\} = \begin{bmatrix} [T_r] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_r\} \\ \{w_a\} \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

или

$$\{q_r\} = [T_r]\{w_r\}; \quad \{q_a\} = [T]\{w_a\},$$

где

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \{w_r\} \\ \{w_a\} \end{Bmatrix}; \ [T_s] = \begin{bmatrix} [T_r] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix};$$

$[T_s]$ – общая блочно диагональная матрица преобразования вектора ОК ОРМ;

$\{w\}$ – вектор новых ОК ОРМ, состоящий из подвекторов $\{w_r\}$ и $\{w_a\}$, аналогично исходным ОК ОРМ;

$[T_r]$, $[T]$ – матрицы преобразования векторов $\{q_r\}$ и $\{q_a\}$ в $\{w_r\}$ и $\{w_a\}$ соответственно.

Здесь матрица $[T(t)]$ известна (см. в (1)) и обеспечивает устранение периодических коэффициентов в уравнениях движения подсистемы АБУ в (1). Матрица $[T_r(t)]$ подлежит определению в зависимости от конкретного устройства роторной машины.

Отметим, что производные матрицы $[T(t)]$ могут быть выражены через саму матрицу:

$$[\dot{T}] = \omega[T][E_c]; \quad [\ddot{T}] = \omega^2[T][E_c]^2 = -\omega^2[T]. \quad (7)$$

Отметим также, что матрицы $[T]$ и $[E_c]$ перестановочны (коммутативны).

Будем полагать, что матрица $[T_r(t)]$ обладает аналогичными свойствами:

$$[\dot{T}_r] = [T_r][E_R]; \quad [\ddot{T}_r] = [T_r][E_R]^2, \quad (8)$$

где $[E_R]$ – некоторая постоянная матрица.

Тогда для общей матрицы перехода справедливо:

$$[\dot{T}_s] = [T_s][N_R]; \quad [\ddot{T}_s] = [T_s][N_R]^2, \quad (9)$$

где

$$[N_R] = \begin{bmatrix} [E_R] & [0] \\ [0] & \omega[E_c] \end{bmatrix}.$$

Далее в уравнениях движения (1) делаем замену переменных (6) и после преобразований с учетом (7)-(9) умножаем уравнения движения ОРМ слева на обратную матрицу $[T_s]^{-1}$. Тогда получаем уравнения возмущенного движения в новых переменных:

$$\begin{aligned} &[M_\Sigma^*]\{\ddot{w}\} + [H^*]\{\dot{w}\} + [K^*]\{w\} + mR\begin{Bmatrix}\{0\} \\ \{f_\psi\}\end{Bmatrix} = \{0\}; \\ &\{\ddot{\psi}\} + h_\varphi\{\dot{\psi}\} + \\ &+\frac{1}{2R}[d_c]\left(\{\ddot{w}_a\} + 2\omega[E_c]\{\dot{w}_a\} - \omega^2\{w_a\}\right) = \{0\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\{f_\psi\} = \{\ddot{\psi}\} + 2\omega[E_c]\{\dot{\psi}\} - \omega^2\{\psi\}; \quad \{w\} = \begin{Bmatrix}\{w_r\} \\ \{w_a\}\end{Bmatrix};$$

$$[M_\Sigma^*] = [T_s]^{-1}[M_\Sigma][T_s];$$

$$[H^*] = [T_s]^{-1}[H][T_s] + 2[M_\Sigma^*][N_R];$$

$$[K^*] = [T_s]^{-1}[K][T_s] + [T_s]^{-1}[H][T_s][N_R] + [M_\Sigma^*][N_R]^2.$$

Здесь в ходе преобразований периодическая матрица $[T]$ сократилась в уравнениях подсистемы АБУ, а также в последнем слагаемом подсистемы ОРМ.

Преобразованные матрицы $[M_\Sigma^*]$, $[H^*]$ и $[K^*]$ в общем случае содержат периодические коэффициенты. Однако при выполнении некоторых требований к ним периодические коэффициенты могут взаимно сокращаться и в целом уравнения движения (10) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами.

Таким образом, для возможности рассматриваемого преобразования необходимо, чтобы МС роторной машины допускала существование такой переменной матрицы $[T_s]$ структуры (6), которая обеспечивает требование постоянства одновременно трех матриц $[M_\Sigma^*]$, $[H^*]$ и $[K^*]$ преобразованной модели движения РМ. Для этого, в частности достаточно свойства перестановочности $[T_s]$ с соответствующими матрицами исходной модели РМ.

Безусловно описанный способ перехода к автономным уравнениям не является универсальным, однако он применим к целому ряду практически важных моделей МС РМ с АБУ, обладающих осесимметричными свойствами.

4. Обобщенное характеристическое уравнение устойчивости роторных машин с автобалансиром

В данном разделе рассматривается проблема аналитического исследования устойчивости автобалансировки по первому приближению на основе уравнений возмущенного движения с постоянными коэффициентами (10).

Перепишем систему уравнений возмущенного движения (10) в полной блочно-матричной форме:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} [M_r^*] & [M_{ra}^*] & [0] \\ [M_{ar}^*] & [M_{a\Sigma}^*] & mR[E] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c] & [E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\{\ddot{w}_r\} \\ \{\ddot{w}_a\} \\ \{\ddot{\psi}\}\end{Bmatrix} + \\ &+\begin{bmatrix} [H_r^*] & [H_{ra}^*] & [0] \\ [H_{ar}^*] & [H_a^*] & 2mR\omega[E_c] \\ [0] & \frac{\omega}{R}[d_c][E_c] & h_\varphi[E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\{\dot{w}_r\} \\ \{\dot{w}_a\} \\ \{\dot{\psi}\}\end{Bmatrix} + \\ &+\begin{bmatrix} [K_r^*] & [K_{ra}^*] & [0] \\ [K_{ar}^*] & [K_a^*] & -mR\omega^2[E] \\ [0] & -\frac{\omega^2}{2R}[d_c] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\{w_r\} \\ \{w_a\} \\ \{\psi\}\end{Bmatrix} = \{0\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$[E_c] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad [E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрицы $\left[M_{\Sigma}^{*}\right]$, $\left[H^{*}\right]$ и $\left[K^{*}\right]$ представлены соответствующими блоками, а индексом «*» подчеркивается, что это постоянные матрицы, полученные в результате преобразования к автономным уравнениям.

Выполним традиционную подстановку вариаций ОК МС вида:

$$\begin{Bmatrix} \{w_r\} \\ \{w_a\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{W_r\} \\ \{W_a\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix} e^{\lambda t}, \qquad (12)$$

где λ – характеристическое число;

$\{W_r\}$, $\{W_a\}$, $\{\Psi\}$ – постоянные амплитуды.

Поставляя (12) в (11), получаем систему алгебраических уравнений задачи собственных значений, которую представим в форме матриц многочленов (λ-матриц):

$$\begin{bmatrix} [A_r(\lambda)] & [A_{ra}(\lambda)] & [0] \\ [A_{ar}(\lambda)] & [A_{a\Sigma}(\lambda)] & mR[S_\omega(\lambda)] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c][S_\omega(\lambda)] & \lambda(\lambda+h_\varphi)[E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{W_r\} \\ \{W_a\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix} = \{0\}, \qquad (13)$$

где

$$[S_\omega(\lambda)] = (\lambda^2 - \omega^2)[E] + 2\omega\lambda[E_c];$$
$$[A_r(\lambda)] = [M_r^*]\lambda^2 + [H_r^*]\lambda + [K_r^*];$$
$$[A_{ra}(\lambda)] = [M_{ra}^*]\lambda^2 + [H_{ra}^*]\lambda + [K_{ra}^*];$$
$$[A_{ar}(\lambda)] = [M_{ar}^*]\lambda^2 + [H_{ar}^*]\lambda + [K_{ar}^*];$$
$$[A_{a\Sigma}(\lambda)] = [M_{a\Sigma}^*]\lambda^2 + [H_a^*]\lambda + [K_a^*].$$

Подматрицы, входящие в (13), имеют следующие размеры: $[S_\omega(\lambda)]$, $[d_c]$, $[E]$, $[E_c]$, $[A_{a\Sigma}(\lambda)]$ – размером (2,2); $[A_r(\lambda)]$ – размером (n_b, n_b); $[A_{ra}(\lambda)]$, $[A_{ar}(\lambda)]$ – размерами (n_b, 2) и (2, n_b) соответственно.

Из (13) получаем обобщенное характеристическое уравнение, записанное в форме определителя от блочной λ-матрицы:

$$\begin{vmatrix} [A_r(\lambda)] & [A_{ra}(\lambda)] & [0] \\ [A_{ar}(\lambda)] & [A_{a\Sigma}(\lambda)] & mR[S_\omega(\lambda)] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c][S_\omega(\lambda)] & \lambda(\lambda+h_\varphi)[E] \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Обобщенное ХУ (14) определяет области устойчивости автобалансировки ОРМ с автобалансиром. Однако его аналитическое применение в форме определителя (14) или в форме характеристического полинома существенно затруднено вследствие очень высокого порядка (даже в случаях простейших РМ). Поэтому представляется актуальным получить ряд других форм представления ХУ. Эти формы ХУ являются точными, но отличаются пониженным порядком определителя и могут служить основой для разработки методов приближенного аналитического исследования устойчивости рассматриваемых МС.

Прежде всего заметим, что уравнения задачи собственных значений (13) могут быть записаны более компактно, если в них исключить амплитуды $\{W_r\}$ части ОК ОРМ. Тогда получим следующую форму ХУ МС [5]:

$$\begin{vmatrix} [S_a(\lambda)] & mR[S_\omega(\lambda)] \\ \frac{1}{2R}[d_c][S_\omega(\lambda)] & \lambda(\lambda+h_\varphi)[E] \end{vmatrix} = 0, \qquad (15)$$

где

$$[S_a(\lambda)] = [A_{a\Sigma}(\lambda)] - [A_{ar}(\lambda)][A_r(\lambda)]^{-1}[A_{ra}(\lambda)].$$

Особенностью (15) является то, что влияние движения всей внешней части ОРМ на движение точки крепления АБУ и на движение КГ в АБУ сведено в одну квадратную матрицу $[S_a(\lambda)]$ размером (2,2). В результате этого размерность системы уравнений сократилась с (n_r + 2) до 4 уравнений независимо от степени сложности роторной машины. При этом, однако, матрица $[S_a(\lambda)]$ более сложным образом зависит от λ, за исключением простейших случаев отсутствия внешней части РМ. Её элементы представляют собой дробно-рациональные функции λ. В случае, если РМ имеет только две степени свободы, то $[S_a(\lambda)] = [A_{a\Sigma}(\lambda)]$. Отметим также, что будем полагать выполненным условие $|A_r(\lambda)| \neq 0$, поскольку рассматриваются РМ, которые будучи без АБУ являются устойчивыми и невырожденными.

Далее обратим внимание, что в (15) три из четырех подматриц имеют заданный вид независимо от устройства ОРМ. Причем диагональная подматрица подсистемы АБУ $\lambda(\lambda+h_\varphi)[E]$ отличается предельно простой структурой. Это дает возможность, воспользовавшись некоторыми свойствами определителей [8], еще понизить порядок определителя ХУ (15) (см. [5]).

Можно показать, что обобщенное ХУ (15) может быть представлено в следующей эквивалентной форме определителя второго порядка:

$$\left| \lambda(\lambda+h_\varphi)[E] - \frac{1}{2}m[R(\lambda)] \right| = 0, \qquad (16)$$

где

$$[R(\lambda)] = [d_c][S_\omega(\lambda)][S_a(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)]$$

или $[R(\lambda)] = [S_a(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)][d_c][S_\omega(\lambda)]$

или $[R(\lambda)] = [S_\omega(\lambda)][d_c][S_\omega(\lambda)][S_a(\lambda)]^{-1}$.

Физический смысл обобщенного ХУ в форме (16) состоит в том, что оно, по сути, представляет собой ХУ подсистемы АБУ, но с учетом влияния на нее подсистемы ОРМ.

Выражение, входящее в определитель (16) представляет собой сумму полиномиальной матрицы подсистемы АБУ и неполиномиальной матрицы влияния подсистемы ОРМ. Матрица $[R(\lambda)]$ является сложной матричной функцией размером (2,2), элементы которой представляют собой дробно-рациональные функции от λ. Причем, имеется три варианта для матричной функции $[R(\lambda)]$, которые эквивалентны друг другу в смысле неизменности корней определителя (16).

Подчеркнем еще раз, что все полученные варианты ХУ (14)-(16) являются точными и эквивалентными друг другу в смысле одинаковости спектра собственных чисел МС. Уравнения (15), (16) не упрощают задачу для точного анализа, поскольку появляются дробно-рациональные зависимости от λ, однако позволяют работать с матрицами пониженного порядка. В частности в (16) определитель имеет минимально возможный порядок (2, 2).

Покажем теперь возможность теоретически точного разложения на множители характеристического уравнения (16).

Раскрывая определитель в (16), получаем следующую форму записи обобщенного ХУ МС:

$$\lambda^2 (\lambda + h_\varphi)^2 - \frac{1}{2} m \,\mathrm{tr}(R)\, \lambda (\lambda + h_\varphi) + \frac{1}{4} m^2 \,|R| = 0\,, \quad (17)$$

где

$|\,R\,| = R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}$; $\mathrm{tr}(R) = R_{11} + R_{22}$ – определитель и след матрицы $[R(\lambda)]$.

R_{ij} – элементы этой же матрицы.

Отметим, что для всех трех вариантов матрицы $[R(\lambda)]$ в (16) ее определитель и след одинаковы в соответствии с их свойствами [8].

Заметим далее, что выражение (17) представляет собой квадратное уравнение относительно величины $\lambda(\lambda+h_\varphi)$ и допускает разложение на два сомножителя. Используя эту особенность можно показать, что задача фактически сводится к анализу условий равенства нулю одного сомножителя вида

$$\lambda^2 + \lambda\, h_\varphi + \frac{1}{4} m\, q(\lambda, j) = 0\,, \quad (18)$$

где

$$q(\lambda, j) = -\mathrm{tr}(R) + j\sqrt{(\mathrm{tr}(R))^2 - 4|\,R\,|}\ ;\ j=\pm 1.$$

Физически значения параметра $j=\pm1$ соответствуют двум различным формам собственных колебаний КГ в АБУ.

В свою очередь выражение (18) можно рассматривать как квадратичный полином относительно λ. Отсюда можно непосредственно выразить собственные числа МС, соответствующие подсистеме АБУ, как функции от $q(\lambda,j)$ (или от $[R(\lambda)]$):

$$\lambda = -\frac{1}{2} h_\varphi + \frac{1}{2} k \sqrt{h_\varphi^2 - m\, q(\lambda, j)}\,,\ k=\pm 1,\ j=\pm 1. \quad (19)$$

Выражение (19) определяет две пары комплексно-сопряженных собственных чисел подсистемы АБУ. Следует иметь в виду, что подкоренные выражения в (18) и (19) в общем случае могут быть как отрицательными, так и положительными.

Таким образом, в результате показанной цепочки преобразований (16)-(19) удается последовательно снизить степень основной (чисто полиномиальной) части ХУ – сначала до 4-й степени в (17), затем до второй степени в (18) и наконец до первой степени в (19). Полученные формы записи обобщенного ХУ могут быть использованы для приближенного аналитического определения границ устойчивости автобалансировки ОРМ. Кроме того, выражение (19) непосредственно может использоваться как итерационная формула для приближенного определения собственных чисел и собственных частот колебаний МС.

5. Обобщенное характеристическое уравнение в частных (особых) случаях

В данном разделе рассматриваются некоторые особенности частных случаев, связанных с особым геометрическим расположением КГ в АБУ при идеальной автобалансировке. Целесообразность анализа этих частных случаев обоснована в работах [4, 5]. В полученных выше уравнениях возмущенного движения и в ХУ геометрия расположения КГ учитывается матрицей $[d_c]$ и её параметрами (см. (1)):

$$[d_c] = \begin{bmatrix} (n - D_c) & -D_s \\ -D_s & (n + D_c) \end{bmatrix}; \qquad (20)$$
$$|d_c| = n^2 - D_c^2 - D_s^2 = n^2 (1 - D),$$

где

$$D = \frac{1}{n^2}\left(D_c^2 + D_s^2\right); \quad 0 \le D \le 1;$$

$$D_c = \sum_{j=1}^{n} \cos 2\alpha_j\,;\ D_s = \sum_{j=1}^{n} \sin 2\alpha_j\,; \quad 0 \le D_c^2, D_s^2 \le n^2.$$

Здесь D – это обобщенный геометрический параметр расположения КГ в АБУ при автобалансирующем режиме движения. В процессе эксплуатации ОРМ он может изменятся в диапазоне D=0…1.

1. Частный случай D=0. При этом имеет место:

$$[d_c] = n[E]\ ;\ |\,d_c| = n^2\,; \qquad (21)$$
$$D_c^2 + D_s^2 = 0\,;\quad D_c = D_s = 0\,.$$

Как видим, матрица $[d_c]$ стала пропорциональной единичной матрице. В этом случае в системе (5) взаимно сокращаются периодические коэффициенты, и обобщенные уравнения движения в неподвижной системе координат приобретают автономный вид:

$$\begin{gathered}\left[M_{\Sigma}\right]\{\ddot{q}\}+[H]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}+mR\left\{\begin{matrix}\{0\}\\ \{\ddot{f}_a\}\end{matrix}\right\}=\{0\};\\ \{\ddot{f}_a\}+\left[H_{\varphi}\right]\{\dot{f}_a\}-\left[K_{\varphi}\right]\{f_a\}+\frac{n}{2R}\{\ddot{q}_a\}=\{0\}.\end{gathered} \qquad (22)$$

Для получения ХУ, соответствующего уравнениям движения (22) в неподвижной системе координат, необходимо выполнить цепочку преобразований, аналогичную (11)-(15).

После преобразований получаем обобщенное ХУ для частного случая D=0:

$$\begin{vmatrix}[B_r(\lambda_0)] & [B_{ra}(\lambda_0)] & [0]\\ [B_{ar}(\lambda_0)] & [B_{a\Sigma}(\lambda_0)] & mR\lambda_0^2[E]\\ [0] & \frac{n}{2R}\lambda_0^2[E] & [B_{\varphi}(\lambda_0)]\end{vmatrix}=0, \qquad (23)$$

или в более компактной форме записи:

$$\begin{vmatrix}[S_0(\lambda_0)] & mR\lambda_0^2[E]\\ \frac{n}{2R}\lambda_0^2[E] & [B_{\varphi}(\lambda_0)]\end{vmatrix}=0, \qquad (24)$$

где

$$\begin{aligned}\left[B_{\varphi}(\lambda_0)\right]&=[E]\lambda_0^2+\left[H_{\varphi}\right]\lambda_0-\left[K_{\varphi}\right]=\\ &=\left(\lambda_0^2+h_{\varphi}-\omega^2\right)[E]-\left(2\omega\lambda_0+h_{\varphi}\omega\right)[E_c];\end{aligned}$$

$$[B_r(\lambda_0)]=[M_r]\lambda_0^2+[H_r]\lambda_0+[K_r];$$

$$[B_{ra}(\lambda_0)]=[M_{ra}]\lambda_0^2+[H_{ra}]\lambda_0+[K_{ra}];$$

$$[B_{ar}(\lambda_0)]=[M_{ar}]\lambda_0^2+[H_{ar}]\lambda_0+[K_{ar}];$$

$$[B_{a\Sigma}(\lambda_0)]=[M_{a\Sigma}]\lambda_0^2+[H_a]\lambda_0+[K_a];$$

$$[S_0(\lambda_0)]=[B_{a\Sigma}(\lambda_0)]-[B_{ar}(\lambda_0)][B_r(\lambda_0)]^{-1}[B_{ra}(\lambda_0)].$$

Здесь матрицы $[M_{\Sigma}]$, $[H]$ и $[K]$ представлены соответствующими блоками.

Подматрицы, входящие в (23), имеют следующие размеры: $[B_{\varphi}(\lambda_0)]$, $[E]$, $[E_c]$, $[B_{a\Sigma}(\lambda_0)]$ – размером (2,2); $[B_r(\lambda_0)]$ – размером (n_b, n_b); $[B_{ra}(\lambda_0)]$, $[B_{ar}(\lambda_0)]$ – размерами (n_b, 2) и (2, n_b) соответственно. Отметим, что все подматрицы, входящие в (24), имеют размер (2, 2).

Обобщенное ХУ (24) может быть также представлено в следующих эквивалентных формах определителя второго порядка:

$$\left|[B_{\varphi}(\lambda_0)]-\frac{1}{2}n\,m\,\lambda^4[S_0(\lambda_0)]^{-1}\right|=0;$$

$$\left|[S_0(\lambda_0)]-\frac{1}{2}n\,m\,\lambda^4[B_{\varphi}(\lambda_0)]^{-1}\right|=0; \qquad (25)$$

или

$$\left|[S_0(\lambda_0)][B_{\varphi}(\lambda_0)]-\frac{1}{2}n\,m\,\lambda^4[E]\right|=0.$$

Формы (25) представляют собой определители второго порядка и получены с использованием их свойств [8]. Отметим также, что при получении уравнений (24) и (25) предполагалось, что $|B_r(\lambda_0)|\neq 0$, $|S_0(\lambda_0)|\neq 0$ и $|B_{\varphi}(\lambda_0)|\neq 0$.

Особенность частного случая D=0 состоит в том, что при этом отпадает необходимость перехода от неподвижной к вращающейся системе координат для устранения периодических коэффициентов. Поэтому матрицы динамической модели ОРМ имеют более простой вид, что расширяет возможности аналитического исследования устойчивости в пространстве параметров МС. Примером этого может служить точное решение, полученное в работе [6]. Кроме того, при D=0 (в отличие от общего случая параметра D) может быть исследована автобалансировка более широкого класса роторных машин (в силу отсутствия требования осесимметричности её свойств) методами теории устойчивости автономных систем.

2. Частный случай D=1. При этом имеет место:

$$|d_c|=0;\quad D_c^2+D_s^2=n^2. \qquad (25)$$

Равенство нулю определителя $|d_c|$ приводит к тому, что формы записи обобщенного ХУ (17), (19), соответствующие вращающейся системе координат, приобретают более простой вид:

$$\lambda\left(\lambda+h_{\varphi}\right)\left(\lambda\left(\lambda+h_{\varphi}\right)-\frac{1}{2}m\,tr(R)\right)=0; \qquad (26)$$

$$\lambda=-\frac{1}{2}h_{\varphi}\pm\frac{1}{2}\sqrt{h_{\varphi}^2+2m\,tr(R)}. \qquad (27)$$

Как видим в этом частном случае в собственном спектре МС всегда присутствуют собственные числа λ_1=0 и λ_2=–h_{φ}. Это дает возможность понизить порядок ХУ МС, что расширяет возможности дальнейшего аналитического исследования. Отметим также, что наличие нулевого корня требует его дополнительного анализа.

Заключение

Таким образом, в работе получено обобщенное характеристическое уравнение (14), определяющее области устойчивости роторной машины с многомассовым автобалансиром пассивного типа. Полученные эквивалентные формы представления обобщенного ХУ (15)-(19) позволяют повысить эффективность применения приближенных методов аналитического исследования устойчивости рассматриваемых МС. Показано, что задача упрощается при анализе частных случаев особого расположения КГ в АБУ, при которых геометрический параметр D принимает значения D=0 и D=1. Исследование этих частных случаев, с одной стороны, расширяет возможности аналитического определения границ устойчивости для сложных РМ, а с другой стороны – дает наиболее важную информацию для эффективного практического применения пассивного АБУ.

Результаты получены на основе единого общего подхода и применимы для роторных машин весьма широкого класса.

Литература

1. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы / В.П. Нестеренко. - Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. - 84 с.

2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами / Г.Б. Филимонихин. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.

3. Горбенко А.Н. Об устойчивости автобалансировки ротора с помощью шариков / А.Н. Горбенко // Проблемы прочности – 2003. – № 3 (363). – с. 120-129.

4. Горбенко А.Н. Изменение границы устойчивости автобалансировки ротора шарами в процессе эксплуатации / А.Н. Горбенко // Авиационно-космическая техника и технология: науч.-техн. журнал. / Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ". – Харьков, 2008. – Вып. 8 (55). – С. 156-159.

5. Горбенко А.Н. Основы общего подхода к анализу устойчивости роторных машин с пассивным автобалансиром / А.Н. Горбенко; Керченский гос. морской технол. ун-т. – Керчь, 2008. – 52с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 07.07.2008, №108 – Ук2008.

6. Горбенко А.Н. Аналитическая оценка эксплуатационной устойчивости автобалансировки ротора на основе точного решения частной задачи / А.Н. Горбенко // Двигатели внутреннего сгорания: науч.-техн. журнал. / Нац. техн. ун-т "ХПИ" – Харьков, 2009. – Вып. 2. – с. 109-114.

7. Горбенко А.Н. Общая структура уравнений движения роторных машин с автобалансиром пассивного типа / А.Н. Горбенко // Авиационно-космическая техника и технология: науч.-техн. журнал. / Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ". – Харьков, 2011. – Вып. 8. – С. 71-76.

8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Поступила в редакцию 19.09.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры А.А.Кислый, Керченский государственный морской технологический университет, Керчь, Украина.

УЗАГАЛЬНЕНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧНЕ РІВНЯННЯ СТІЙКОСТІ РОТОРНИХ МАШИН З АВТОБАЛАНСИРОМ

О.М. Горбенко

У роботі розглядається проблема нелінійної стійкості багатомасового автобалансуючого пристрою пасивного типа, встановленого на довільну роторну машину. На основі рівнянь збудженого руху з сумарними узагальненими координатами автобалансира отримано узагальнене характеристичне рівняння для аналізу стійкості механічної системи. Запропонована процедура пониження порядку характеристичного рівняння для подальшого наближеного аналізу. Отримані узагальнені формули, що дозволяють оцінити спектр власних чисел і область стійкості автобалансування роторної машини. Розглянуті окремі випадки.

Ключові слова: роторна машина, ротор, автобалансування, пасивний автобалансир, стійкість, характеристичне рівняння.

THE GENERALIZED CHARACTERISTIC EQUATION OF STABILITY OF ROTOR MACHINES WITH THE AUTOBALANCER

A.N. Gorbenko

The problem of nonlinear stability of the multimass passive autobalancer installed on rotor machine is considered in the article. On the basis of the perturbed movement equations with the sum generalized coordinates of the autobalancer the generalized characteristic equation for the analysis of stability of mechanical system is received. Procedure of reduce of an order of the characteristic equation for the following approached analysis is offered. The generalized formulas which allow to estimate a spectrum of eigenvalues and region of autobalancing stability of rotor machine are received. Special cases are considered.

Keywords: rotor machine, rotor, autobalancing, the passive autobalancer, stability, the characteristic equation.

Горбенко Александр Николаевич – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры судовых энергетических установок Керченского государственного морского технологического университета, Керчь, Украина, e-mail: gan@kerch.net., www.gorbenko-a-n.narod.ru.

Библиографическое описание статьи:

Горбенко А.Н. Обобщенное характеристическое уравнение устойчивости роторных машин с автобалансиром // Авиационно-космическая техника и технология: Научно-технический журнал. – Харьков: НАУ "Харьковский авиационный институт". – 2012. – № 1(88).– С. 76-82.