

Горбенко А.Н.

Керченский государственный морской технологический университет

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА С АВТОБАЛАНСИРОМ В ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА С МНОЖИТЕЛЯМИ

В работе получены уравнения движения, в которых в явном виде присутствуют функции связей компенсирующих масс с ротором. Рассмотрен общий и некоторые частные случаи. Получены формальные требования к функциям связей для возможности полной автобалансировки ротора.

1. Постановка проблемы. Анализ существующих исследований.

Цель работы.

Автобалансирующие устройства (АБУ) пассивного типа находят применение в роторных машинах (РМ) для снижения уровня их вибрации. Их практическое применение сталкивается с проблемой обеспечения устойчивости и эффективности автобалансирующего режима движения механической системы (МС). В свою очередь, решение этой проблемы обуславливает необходимость развития теории автобалансировки.

Наибольшее развитие аналитическая теория динамики и устойчивости пассивных автобалансиров, по мнению автора, получила в работах [1-6] и других. В то же время анализ существующих исследований показывает, что в них не используется такая форма уравнений движения МС, как уравнения Лагранжа с множителями (уравнения со связями). В целом подобная форма уравнений движения сравнительно редко используется при исследовании динамики различных МС, поскольку она содержит избыточное количество неизвестных переменных и уравнений [7-9]. В то же время во многих случаях она оказывается более эффективной (см. например обзор в [9] и др.). К достоинствам такого подхода относятся: более простая и симметричная форма системы уравнений, возможность единого подхода к исследованию связей различного вида и др. В связи с указанным, существует потребность развития в данном направлении аналитической теории пассивных автобалансиров.

Целью данной работы является получение и анализ структуры уравнений движения роторной машины произвольного вида с автобалансирами в форме уравнений Лагранжа с множителями.

2. Физическая модель. Обобщенные координаты. Уравнения связей.

Рассматривается механическая система, состоящая из роторной машины весьма общего вида, к ротору которой присоединен набор компенсирующих масс (КМ), образующих вместе один или несколько автобалансиров. Под термином «роторная машина» (или подсистема РМ, подсистема ротора) будем далее в общем случае понимать машину, состоящую из вращающегося

многодискового ротора (или нескольких роторов, связанных между собой), который посредством произвольного количества опор (подшипников) соединен с произвольным числом тел, связанных друг с другом и имеющих некоторые степени свободы колебательного движения. Ротор в общем случае статически и динамически неуравновешен. Таким образом, рассматриваются многомассовые роторные машины весьма общего состава и устройства.

Автобалансиры представляют собой наборы КМ, определенным образом связанные с некоторыми точками ротора. Функции связи устанавливают взаимозависимость обобщенных координат КМ и точек их крепления к ротору. Вид этих формул может быть различным для разных типов АБУ.

Установим правила записи и нумерации обобщенных координат и связей. Для описания движения всей МС введем систему неподвижных координат xuz , ось z которой совпадает с осью вращения ротора при неподвижной РМ, а оси x , y – перпендикулярны оси z .

В подсистеме РМ выделим n_s физических точек и присвоим каждой из них N_s обобщенных координат, характеризующих в общем случае поступательные и угловые (поворотные) перемещения. Осевые смещения вдоль оси z будем считать несущественными, поэтому N_s равно 2 или 4. Тогда вектор ОК РМ может быть записан в виде

$$\{v\} = v_{s,i}, \quad s = 1 \dots n_s, \quad i = 1 \dots N_s \quad (1)$$

или через подвекторы ОК физических точек РМ: $\{v\} = \{v\}_s = \begin{Bmatrix} v_{s,1} \\ \vdots \\ v_{s,N_s} \end{Bmatrix}, \quad s = 1 \dots n_s.$

Все КМ АБУ будем рассматривать как n_k физических точек, совпадающих с их центрами масс. Каждой из них соответствуют N_k ОК, характеризующих в общем случае поступательные и угловые перемещения в координатах xuz , включая возможность перемещения вдоль оси z . Число N_k может составлять от 2 до 6. Вектор ОК КМ АБУ можно записать в виде

$$\{w\} = w_{k,j}, \quad k = 1 \dots n_k, \quad j = 1 \dots N_k \quad (2)$$

или через подвекторы ОК отдельных КМ: $\{w\} = \{w\}_k = \begin{Bmatrix} w_{k,1} \\ \vdots \\ w_{k,N_k} \end{Bmatrix}, \quad k = 1 \dots n_k.$

Полный вектор ОК всей МС:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \dots \\ \{w\} \end{Bmatrix} = q_l, \quad l = 1 \dots n_\Sigma; \quad n_\Sigma = n_s N_s + n_k N_k. \quad (3)$$

В МС РМ с АБУ имеется n_p геометрических связей между ротором и КМ. Функция f_p p -й связи представляет собой алгебраическую нелинейную функцию от ОК ротора и КМ.

3. Уравнения движения Лагранжа с множителями

Движение МС может быть полностью описано системой уравнений Лагранжа с множителями следующего вида [7-9]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} &= Q_l + \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \frac{\partial f_p}{\partial q_l}, \quad l = 1 \dots n_\Sigma; \\ f_p &= 0, \quad p = 1 \dots n_p, \end{aligned} \quad (4)$$

где T – кинетическая энергия всей МС; Q_l – обобщенные силы; f_p – функции связей; μ_p – неопределенные множители Лагранжа, соответствующие связям.

Система (4) позволяет определить неизвестные координаты q_l и множители μ_p . Количество неизвестных ($n_\Sigma + n_p$) совпадает с числом уравнений.

Благодаря использованию для описания движения точек МС независимой (абсолютной) системы координат, общее выражение для кинетической энергии РМ с АБУ (а значит и вид дифференциальных уравнений движения) приобретает простой вид и допускает представление в форме суммы:

$$T(\{\dot{q}\}) = T_{PM}(\{\dot{v}\}) + T_{ABY}(\{\dot{w}\}), \quad (5)$$

где $T_{PM}(\{\dot{v}\})$, $T_{ABY}(\{\dot{w}\})$ – кинетические энергии РМ и АБУ соответственно, не зависящие от обобщенных координат, но зависящие от их скоростей.

Отметим, что, поскольку ротор неуравновешен, то $T_{PM}(\{\dot{v}\})$ явным образом зависит также от времени t .

На основании представления (5) и обозначений (1)-(3) из (4) получаем следующую систему уравнений движения МС РМ с АБУ для общего случая:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{PM}(\{\dot{v}\})}{\partial \dot{v}_{s,i}} \right) - Q_{s,i}^v - \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \frac{\partial f_p(\{v\}, \{w\})}{\partial v_{s,i}} &= 0, \quad s = 1 \dots n_s, \quad i = 1 \dots N_s; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{ABY}(\{\dot{w}\})}{\partial \dot{w}_{k,j}} \right) - Q_{k,j}^w - \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \frac{\partial f_p(\{v\}, \{w\})}{\partial w_{k,j}} &= 0, \quad k = 1 \dots n_k, \quad j = 1 \dots N_k; \\ f_p(\{v\}, \{w\}) &= 0, \quad p = 1 \dots n_p, \end{aligned} \quad (6)$$

где $Q_{s,i}^v(\{v\}, \{\dot{v}\})$ – обобщенные силы упругости и демпфирования, действующие в подсистеме РМ; $Q_{k,j}^w(\{v\}, \{w\}, \{\dot{v}\}, \{\dot{w}\})$ – обобщенные силы упругости и демпфирования, действующие на КМ АБУ.

В системе (6) первая группа уравнений соответствует РМ, вторая группа – КМ АБУ, а третья группа – это алгебраические уравнения связей КМ с РМ. Суммы в дифференциальных уравнениях в системе (6) по физическому смыслу представляют собой реакции связей.

Сделаем два замечания относительно сил $Q_{k,j}^w(\{v\}, \{w\}, \{\dot{v}\}, \{\dot{w}\})$. Во-первых, в большинстве известных АБУ на КМ действуют силы вязкого сопротивления движению, зависящие от скорости их движения относительно вращающегося ротора, т.е. как от $\{\dot{w}\}$, так и от $\{\dot{v}\}$. Во-вторых, с целью общности рассмотрения будем полагать, что на КМ могут также действовать силы упругости (зависящие от ОК $\{w\}$ и $\{v\}$), хотя в известных АБУ они отсутствуют.

Уравнения Лагранжа (6), как известно, могут быть преобразованы к явной дифференциальной форме. Используя матричный способ записи, уравнения движения, эквивалентные (6), можно привести к виду:

$$\begin{aligned} [M_r]\{\ddot{v}\} + [H_r]\{\dot{v}\} + [K_r]\{v\} - \{D_r(\omega t)\} - [f^r]\{\mu\} &= 0; \\ [M_a]\{\ddot{w}\} + \{h_a\} + \{S_a\} - [f^a]\{\mu\} &= 0; \\ f_p(\{v\}, \{w\}) &= 0, \quad p = 1 \dots n_p, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} [f^r]_{l,p} &= f_{l,p}^r = \frac{\partial f_p}{\partial v_l}, \quad l = 1 \dots (n_s N_s), \quad p = 1 \dots n_p; \\ [f^a]_{\alpha,p} &= f_{\alpha,p}^a = \frac{\partial f_p}{\partial w_\alpha}, \quad \alpha = 1 \dots (n_k N_k), \quad p = 1 \dots n_p; \end{aligned}$$

$\{\mu\} = \mu_p$, $p = 1 \dots n_p$ – вектор множителей связей; $[f^r]$, $[f^a]$ – прямоугольные матрицы частных производных от функций связи по ОК размерами $(n_s \cdot N_s, n_p)$ и $(n_k \cdot N_k, n_p)$ соответственно; $[M_r]$, $[H_r]$, $[K_r]$ – квадратные матрицы инерции, демпфирования и жесткости РМ размером $n_s \cdot N_s$; $[M_a]$ – квадратная матрица инерции АБУ размером $n_k \cdot N_k$; $\{D_r(\omega t)\}$ – вектор дисбалансов РМ, не зависящий от ОК; $\{h_a\} = \{h_a(\{\dot{v}\}, \{\dot{w}\}, t)\}$, $\{S_a\} = \{S_a(\{v\}, \{w\}, t)\}$ – векторы обобщенных сил демпфирования и упругости, действующих на КМ.

Сформулируем на основе (7) общее требование к связям АБУ для возможности полной автобалансировки ротора РМ. В этом случае весь ротор (а значит и присоединенные к нему тела) не колеблется, т.е. $\{v\} \equiv 0$. Кроме того, все КМ занимают неподвижное положение относительно ротора и вращаются синхронно с ним, поэтому $\{h_a\} \equiv 0$ и $\{S_a\} \equiv 0$. Тогда из (7) получаем, что

$$\begin{aligned} [f^r]\{\mu\} &= -\{D_r(\omega t)\}; \\ [f^a]\{\mu\} &= [M_a]\{\ddot{w}\}; \\ f_p(\{v\}, \{w\}) &= 0, \quad p = 1 \dots n_p, \quad \{v\} \equiv 0, \quad \{w\} = \{\tilde{w}\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\{\tilde{w}\}$ – автобалансирующее решение для ОК КМ.

Отсюда формальное требование к связям АБУ для возможности обеспечения полной автобалансировки ротора:

$$[f^r][f^a]^{-1}[M_a]\{\ddot{w}\} = -\{D_r(\omega t)\}, \quad (9)$$

где $[f^a]^{-1}$ – псевдообратная прямоугольная матрица такая, что произведение $[f^a]^{-1}[f^a]$ равно единичной матрице [10].

Если функции связи f_p удовлетворяют условию (9), то для данного типа АБУ принципиально возможен автобалансирующий режим движения МС. При этом вопрос его устойчивости, очевидно, требует дополнительного анализа.

Отметим следующую особенность. Подсистема уравнений (8), соответствующая КМ, является переопределенной относительно вектора множителей $\{\mu\}$, так как $n_k \cdot N_k \geq n_p$. Поэтому существует неединственный способ выразить $\{\mu\}$ из этой подсистемы (кроме использования псевдообратной матрицы). В связи с этим существует множество вариантов записи условия (9) для конкретного типа АБУ.

Таким образом, полученные уравнения (6)-(9) носят весьма общий характер и образуют определенный фундамент для дальнейшего развития теории автобалансировки.

Рассмотрим далее класс МС РМ с АБУ, который несколько более узкий (чем для (6)-(9)), но охватывает все известные разновидности пассивных АБУ с твердыми КМ. Будем полагать, что каждая из КМ связана только с одной из точек ротора и не связана с другими КМ. Поэтому число связей равно числу КМ $n_p = n_k$ и в уравнениях движения КМ будет присутствовать только одна из функций связи (вместо их суммы). Кроме того, считаем, что на КМ не действуют силы упругости, т.е. $Q_{k,j}^w = Q_{k,j}^w(\{\dot{v}\}, \{\dot{w}\})$ и $\{S_a\} = 0$.

С учетом приведенных особенностей МС уравнения движения, аналогичные (6) и (7), принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{PM}(\{\dot{v}\})}{\partial \dot{v}_{s,i}} \right) - Q_{s,i}^v - \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \frac{\partial f_p(\{v\}, \{w\}_p)}{\partial v_{s,i}} &= 0, \quad s=1 \dots n_s, \quad i=1 \dots N_s; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_{ABU}(\{\dot{w}\})}{\partial \dot{w}_{k,j}} \right) - Q_{k,j}^w - \mu_k \frac{\partial f_k(\{v\}, \{w\}_k)}{\partial w_{k,j}} &= 0, \quad k=1 \dots n_k, \quad j=1 \dots N_k; \\ f_p(\{v\}, \{w\}_p) &= 0, \quad p=1 \dots n_p, \end{aligned} \quad (10)$$

или в матричной форме:

$$\begin{aligned} [M_r]\{\ddot{v}\} + [H_r]\{\dot{v}\} + [K_r]\{v\} - \{D_r(\omega t)\} - [f^r]\{\mu\} &= 0; \\ [M_a]\{\ddot{w}\} + \{h_a\} - [f^a]\{\mu\} &= 0; \\ f_p(\{v\}, \{w\}_p) &= 0, \quad p=1 \dots n_p, \end{aligned} \quad (11)$$

где в каждой из строк прямоугольной матрицы $[f^a]$ присутствует только один ненулевой элемент.

Формальное требование к связям АБУ для возможности полной автобалансировки ротора для указанного класса МС имеет вид, совпадающий с (9). Кроме того, это условие может быть получено на основе (10) путем выражения μ_k из уравнений движения k -й КМ и подстановки в уравнения РМ.

4. Уравнения движения простейшего ротора с автобалансиром

Получим в качестве примера уравнения движения с множителями для МС из простейшего статически неуравновешенного однодискового ротора и АБУ, состоящего из n_k КМ, которые имеют возможность перемещения в плоскости диска (рис.1). В этом случае имеют место соотношения:

$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$, $n_s=1$, $N_s=2$, – подсистема РМ состоит из одной физической точки с двумя координатами;

$\{w\} = \{w\}_k = \begin{Bmatrix} w_{k,1} \\ w_{k,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{Bmatrix}$, $k=1 \dots n_k$, $N_k=2$, – подсистема КМ состоит из n_k физических точек с двумя координатами;

$f_p(\{v\}, \{w\}_p) = 0$, $p=1 \dots n_p$, $n_k = n_p$, $k=p$, – каждая из КМ связана только с ротором и число связей равно числу КМ.

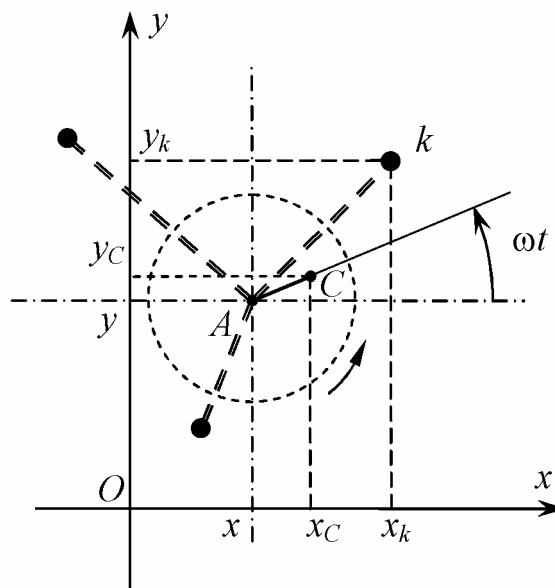


Рисунок 1 – Механическая система простейшего ротора с АБУ

Кинетическая энергия МС:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x} - r\omega \sin \omega t)^2 + \frac{1}{2}M(\dot{y} + r\omega \cos \omega t)^2 + \frac{1}{2}m \sum_{k=1}^{n_k} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2), \quad (12)$$

где M , r – масса и эксцентриситет диска; ω – угловая скорость вращения ротора; m – масса КМ.

Обобщенные силы:

$$\begin{aligned} Q_{1,1}^v &= -Kx - \beta \dot{x}; \quad Q_{1,2}^v = -Ky - \beta \dot{y}; \\ Q_{k,1}^w &= Q_{xk}(\{\dot{w}\}_k, \{\dot{v}\}, \{w\}_k, \{v\}, t); \quad Q_{k,2}^w = Q_{yk}(\{\dot{w}\}_k, \{\dot{v}\}, \{w\}_k, \{v\}, t), \end{aligned} \quad (13)$$

где K , β – коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования ротора.

Уравнения движения МС с множителями получаем на основе (10) с учетом (12), (13):

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + \beta \dot{x} + Kx - Mr\omega^2 \cos \omega t - \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \frac{\partial f_p}{\partial x} &= 0; \\ M\ddot{y} + \beta \dot{y} + Ky - Mr\omega^2 \sin \omega t - \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \frac{\partial f_p}{\partial y} &= 0; \\ m\ddot{x}_k + Q_{xk} - \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k} &= 0, \quad k=1 \dots n_k; \\ m\ddot{y}_k + Q_{yk} - \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial y_k} &= 0, \quad k=1 \dots n_k; \\ f_p(x, y, x_p, y_p) &= 0, \quad p=1 \dots n_p, \quad n_p = n_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Система (14) является нелинейной, состоит из $(2+3n_k)$ уравнений и содержит столько же неизвестных.

Для режима автобалансировки имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x &\equiv 0; \quad y \equiv 0; \quad Q_{xk} \equiv 0; \quad Q_{yk} \equiv 0; \\ x_k &= R_k \cos(\omega t + \alpha_k); \quad y_k = R_k \sin(\omega t + \alpha_k), \quad R_k = \text{const}, \quad \alpha_k = \text{const}, \quad k=1 \dots n_k. \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (15) система (14) приобретает вид, соответствующий режиму идеальной автобалансировки:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \frac{\partial f_p}{\partial x} &= -Mr\omega^2 \cos \omega t; \\ \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \frac{\partial f_p}{\partial y} &= -Mr\omega^2 \sin \omega t; \\ \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k} &= -mR_k \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_k), \quad k=1 \dots n_k; \\ \mu_k \frac{\partial f_k}{\partial y_k} &= -mR_k \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_k), \quad k=1 \dots n_k; \\ f_p(x=0, y=0, x_p, y_p) &= 0, \quad p=1 \dots n_p, \quad n_p = n_k \end{aligned} \quad (16)$$

или после некоторых преобразований:

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \left(\frac{\partial f_p}{\partial x} \cos \omega t + \frac{\partial f_p}{\partial y} \sin \omega t \right) &= -Mr\omega^2 \quad ; \\
\sum_{p=1}^{n_p} \mu_p \left(\frac{\partial f_p}{\partial x} \sin \omega t + \frac{\partial f_p}{\partial y} \cos \omega t \right) &= 0 \quad ; \\
\mu_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \cos(\omega t + \alpha_k) + \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \sin(\omega t + \alpha_k) \right) &= -mR_k \omega^2, \quad k=1 \dots n_k; \quad (17) \\
\mu_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \sin(\omega t + \alpha_k) - \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \cos(\omega t + \alpha_k) \right) &= 0, \quad k=1 \dots n_k; \\
f_p(x=0, y=0, x_p, y_p) &= 0, \quad p=1 \dots n_p, \quad n_p = n_k.
\end{aligned}$$

Здесь предпоследняя группа уравнений может рассматриваться как один из вариантов требования к связям данного АБУ для возможности полной автобалансировки ротора (поскольку $\mu_k \neq 0$).

В уравнениях (14)-(17) функции связей КМ с ротором записаны в общем виде. В случае анализа традиционно применяемого автобалансира шарикового (маятникового) типа уравнения связей имеют конкретный вид:

$$f_p = (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 - R^2 = 0, \quad p=1 \dots n_p, \quad (18)$$

где R – радиус окружности расположения КМ.

Тогда уравнения движения МС с множителями для шарикового (маятникового) автобалансира принимают вид:

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx - Mr\omega^2 \cos \omega t + 2 \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p (x_p - x) &= 0 \quad ; \\
M\ddot{y} + \beta\dot{y} + Ky - Mr\omega^2 \sin \omega t + 2 \sum_{p=1}^{n_p} \mu_p (y_p - y) &= 0 \quad ; \\
m\ddot{x}_k + Q_{xk} - 2\mu_k (x_k - x) &= 0, \quad k=1 \dots n_k; \\
m\ddot{y}_k + Q_{yk} - 2\mu_k (y_k - x) &= 0, \quad k=1 \dots n_k; \\
f_p = (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 - R^2 &= 0, \quad p=1 \dots n_p, \quad n_p = n_k.
\end{aligned} \quad (19)$$

Можно также убедиться, что функции связей вида (18) удовлетворяют уравнениям (16), (17) для режима идеальной автобалансировки.

Заключение

Результаты работы образуют основу нового подхода к исследованию динамики и устойчивости МС произвольной роторной машины с АБУ пассивного типа. При этом КМ АБУ рассматриваются как материальные тела, связанные с ротором, а функции связей в явном виде присутствуют в уравнениях движения. Полученные уравнения движения с множителями Лагранжа, несмотря на некоторые недостатки, отличаются более симметричной

структурой, могут быть более удобными для анализа устойчивости и позволяют с единых позиций исследовать АБУ различных типов. Кроме того, использование в уравнениях функций связей в общем виде приводит к возможности формализовать и алгоритмизировать задачу синтеза новых конструкций автобалансиров.

Литература

1. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической автобалансировки // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – №4. – С. 38-45.
2. Агафонов Ю.В. Исследование устойчивости шарикового автобалансира роторной системы на упругих опорах // Машиноведение. - 1976. - № 6. - с. 3-7.
3. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1981. - 352с.
4. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. - Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. - 84 с.
5. Филимонихин Г.Б. Зрівноваження і вибіркозахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
6. Горбенко А.Н. Об устойчивости автобалансировки ротора с помощью шариков // Проблемы прочности – 2002. – № 3 (363). – с. 120-129.
7. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Том 2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.
8. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики.- М. Наука, 1997. – 320 с.
9. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения негोलонномных систем и вариационные принципы механики. – М.: Физматлит, 2005. – 272 с.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Анотація

У роботі одержані рівняння руху, в яких в явному вигляді присутні функції зв'язків компенсуючих мас з ротором. Розглянутий загальний і деякі окремі випадки. Одержані формальні вимоги до функцій зв'язків для можливості повного автобалансування ротора.

Summary

Equations of motion, in which there are the functions of connections between the compensating masses and a rotor in an obvious kind, are got in the work. It is considered general and some special cases. The formal requirements to the connections functions for possibility of complete rotor autobalancing are got.

Библиографическое описание статьи:

Горбенко А.Н. Об уравнениях движения ротора с автобалансиром в форме уравнений Лагранжа с множителями // Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленных и аграрных предприятий. Сб. науч. тр. КГМТУ. – Керчь: КГМТУ. – 2009. – Вып.10. – с. 39-46..