

МИНИСТЕРСТВО АГРАРНОЙ ПОЛИТИКИ УКРАИНЫ  
КЕРЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МОРСКОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

УДК 62-752+62-755:534.1

ГРНТИ

Горбенко Александр Николаевич

ОСНОВЫ ОБЩЕГО ПОДХОДА К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ  
РОТОРНЫХ МАШИН С ПАССИВНЫМ АВТОБАЛАНСИРОМ

Керчь – 2008

---

Библиографическое описание статьи:

Основы общего подхода к анализу устойчивости роторных машин с пассивным автобалансиром / Горбенко А.Н.; Керч. гос. морской технол. ун-т. - Керчь, 2008. - 52с. - Библиогр.: 37 назв. - Рус. - Деп. в ГНТБ Украины 07.07.2008, №108-Ук2008.

## 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

Для снижения вибрации роторных машин находят применение автобалансирующие устройства (АБУ) пассивного типа (см. например [1-26]). При определенных условиях они автоматически уравнивают ротор, устраняя тем самым возникновение сил от дисбалансов и снижая вибрацию машины в процессе ее работы. Подобные устройства относятся к существенно нелинейным механическим системам с нетривиальными свойствами, что вызывает трудности ее исследования. Одной из основных проблем их практического применения является сложность обеспечения надежной устойчивости автобалансирующего режима движения механической системы (МС) роторной машины (РМ) с АБУ. Полноценное решение этой проблемы невозможно без развития аналитической теории автобалансировки роторных машин произвольного вида, которая позволяла бы в явной аналитической форме и с приемлемой точностью определять границы устойчивости в зависимости от параметров системы. Данная работа направлена на развитие методов получения аналитических зависимостей для границ устойчивости автобалансировки (не умаляя, однако, значения экспериментальных и численных методов исследования).

Аналитическому исследованию автобалансирующих устройств посвящено значительное количество работ (см. [1-26] и др.). Подробный обзор существующих в настоящее время исследований можно найти в монографии Филимоныхина Г.Б. [12]. Наибольшее развитие аналитическая теория устойчивости классических пассивных автобалансирующих устройств, по мнению автора, получила в работах Детинко [1], Агафонова [2, 3], Блехмана [4], Кравченко [5, 6], Нестеренко [7 и др.], Филимоныхина Г.Б. [8-12 и др.], Горбенко А.Н. [13-22 и др.] и других. В то же время критический анализ существующих аналитических исследований данного направления показывает, что для них характерны следующие основные недостатки.

1. Большинство полученных аналитических условий устойчивости автобалансировки отличаются низкой точностью, не отражают влияние всего комплекса параметров системы и носят сугубо ориентировочный характер. Причиной этого является то, что они получены либо простейшим методом кинестатики, либо с помощью одного из методов приближенного решения дифференциальных уравнений, таких как метод осреднения, малого параметра, разделения движения,

самосинхронизации и т.п. Причем эффективность этих методов, зачастую требующих весьма трудоемких преобразований, не превышает возможностей относительно простого инженерного критерия устойчивости автобалансировки, предложенного в [12]. Лишь в некоторых работах и только для простейшего ротора с АБУ получены аналитические формулы, отражающие в явном виде зависимость критических скоростей вращения ротора (являющихся границами устойчивости) от всех параметров МС [12, 22]. Причем эти результаты получены на основе приближенного анализа характеристического уравнения (в отличие от других работ).

2. Отсутствие единого общего подхода к анализу устойчивости автобалансировки роторных машин произвольного вида. Существующие работы в этом смысле носят индивидуальный несистематический характер, уравнения движения составляются лишь для конкретной РМ с АБУ и далее выполняется их анализ. Данное обстоятельство ограничивает возможности выявления общих свойств и закономерностей устойчивости автобалансировки РМ различного состава и вида. Отметим, однако, что элементы системного подхода к исследованию РМ различных видов имеются в работах [12] и [7].

Указанные недостатки являются следствием высокой сложности задачи анализа движения МС РМ с АБУ по причинам её существенной нелинейности и большого количества обобщенных координат (ОК). Так, уже в случае простейшего однодискового ротора с АБУ из двух компенсирующих масс (КМ) задача сводится к системе четырех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, что приводит к характеристическому уравнению восьмой степени. Столь высокая степень последнего делает невозможным прямое аналитическое использование известных критериев устойчивости (Рауса-Гурвица и т.п.).

В связи со сказанным, существует актуальная потребность разработки приближенных подходов и методов аналитического исследования устойчивости механических систем рассматриваемого типа. Очевидно, что для получения работоспособных методов необходимо глубокое изучение специфических особенностей всего класса МС РМ с АБУ (а не их частных вариантов), выявление структурных свойств уравнений движения (невозмущенного и возмущенного), а также их использование при формировании процедур приближенного анализа.

Конечным результатом исследования следует считать получение аналитических формул, позволяющих количественно и качественно определить границы устойчивости

автобалансировки в зависимости от всех параметров МС. При этом основной формой представления результатов анализа будем считать явные аналитические формулы зависимости граничных (критических) частот вращения ротора от параметров МС. Под граничными частотами вращения будем понимать такие, при которых вещественная часть одного из собственных чисел МС принимает нулевое значение. Их можно также называть критическими частотами вращения в том смысле, что, по крайней мере, часть из них являются границами области устойчивости автобалансировки.

Целью настоящей работы является получение и анализ общих уравнений динамики и устойчивости роторных машин широкого класса, оснащенных одним многомассовым автобалансиром пассивного типа, и разработка аналитических методов анализа устойчивости автобалансирующего режима движения механической системы. В совокупности результаты работы образуют теоретические основы общего метода аналитического исследования устойчивости автобалансировки РМ.

Данная работа базируется на хорошо разработанном аппарате классической теории устойчивости движения систем [27-30 и др.], что, по мнению автора, в недостаточной мере использовалось в большинстве существующих исследований. Эффективность такого подхода, в частности, подтверждается тем, что наиболее точные формулы (из известных) для границ устойчивости были получены на основе приближенного анализа характеристического уравнения возмущенного движения. Применение же какого-либо из известных методов приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений, судя по существующим работам, чрезмерно огрубляет математическую модель РМ с АБУ и не позволяет получать достаточно точные результаты.

В общем случае исследование устойчивости выполняется в несколько весьма трудоемких этапов преобразований. Очевидно при разработке метода следует по возможности минимизировать количество и сложность преобразований независимых переменных в уравнениях движения, поскольку они усложняют аналитический вид коэффициентов уравнений (содержащих параметры системы) и повышают сложность получения приближенных аналитических формул на последнем этапе анализа.

Отметим также, что, поскольку здесь рассматриваются системы уравнений с неопределенным в общем случае числом обобщенных координат, то наиболее эффективным и наглядным будет использование матричной формы записи.

## 2. КЛАСС РАССМАТРИВАЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе рассматриваются механические системы, состоящие из роторной машины весьма общего вида с одним пассивным многомассовым автобалансиром, прикрепленным к одной из точек оси вала ротора (рисунок 2.1).

Под термином «роторная машина» (или подсистема РМ, подсистема ротора) будем далее в общем случае понимать машину, состоящую из вращающегося многодискового ротора (или нескольких роторов, связанных между собой), который посредством произвольного количества опор (подшипников) соединен с произвольным числом тел, связанных друг с другом и имеющих некоторые степени свободы колебательного движения. Ротор в общем случае статически и динамически неуравновешен. Центр масс (ЦМ) ротора не обязательно находится в плоскости АБУ.

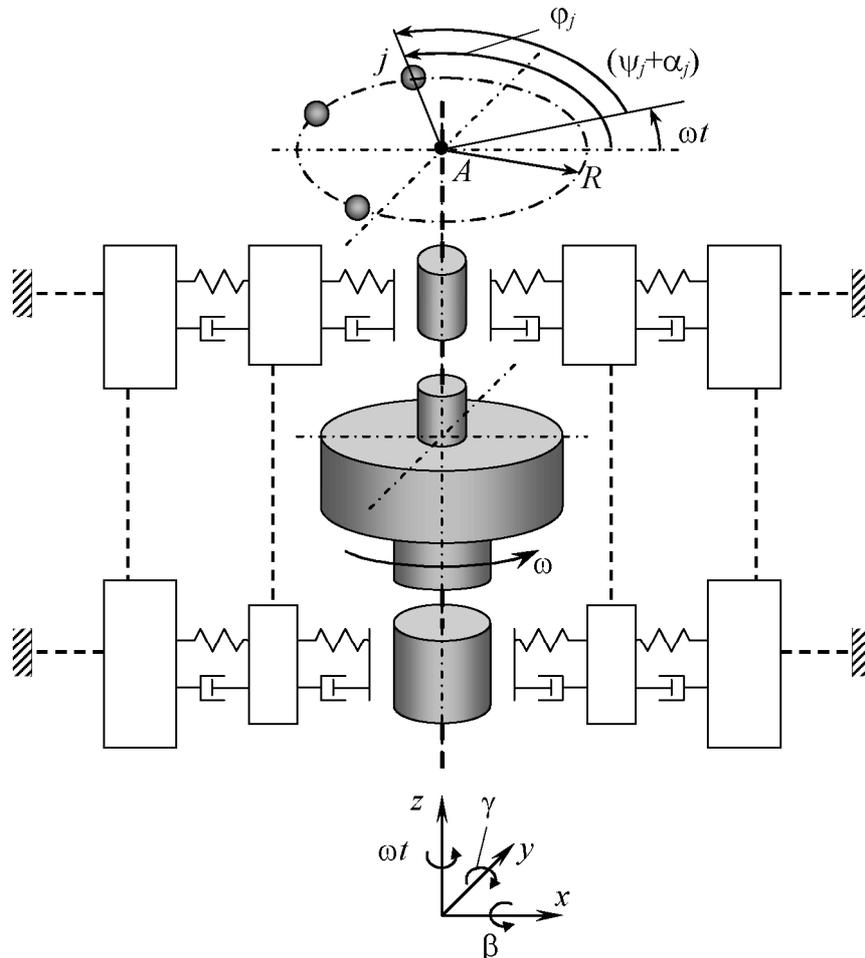


Рисунок 2.1 – Схема механической системы «роторная машина – автобалансир»

Таким образом, рассматриваются многомассовые роторные машины весьма общего состава и устройства. Единственное, но важное, ограничение состоит в том, что РМ должна быть линейной, т.е. её движение должно описываться системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

К одной из точек вала ротора (точка  $A$ ) прикреплен автобалансир пассивного типа, состоящий из  $n$  компенсирующих масс, в качестве которых могут быть тела качения (шары, ролики и др.), маятники и т.п. Число КМ произвольное, но не менее двух ( $n \geq 2$ ). Плоскость АБУ перпендикулярна оси вала в точке крепления. КМ имеют возможность перемещения в плоскости АБУ относительно оси ротора по окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $A$  крепления к валу. АБУ совершает плоско-параллельное движение, т.е. её угловые повороты считаем несущественными.

В целом механическая система РМ с АБУ представляет собой совокупность связанных между собой двух подсистем: подсистемы РМ и подсистемы КМ в АБУ (или просто подсистемы АБУ).

Введем также для удобства понятие – «базовая (простейшая) модель» МС РМ с АБУ. Под ней будем понимать простейший ротор с одним диском посередине между опор. Диск статически неуравновешен и совершает плоско-параллельное движение. Ротор и опоры изотропны. АБУ установлен в плоскости диска. Базовая модель МС является наиболее изученной в теории автобалансировки.

### 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ОСОБЕННОСТИ ИХ СТРУКТУРЫ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Текущее положение элементов РМ будем описывать, используя декартову систему координат  $xuz$ , ось  $z$  которой совпадает с осью ротора в неподвижном состоянии. Текущее положение отдельной КМ характеризуется угловой координатой  $\varphi_j$ , отсчитываемой в плоскости АБУ от некоторого положения, фиксированного по отношению к ротору (рисунок 2.1).

Движение МС РМ с АБУ описывается набором обобщенных координат. Введем следующую систему классификации ОК:

$$1) \{q\} = \left\{ \begin{array}{c} \{q_r\} \\ \text{---} \\ \{q_a\} \end{array} \right\} = q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_r \text{ – группа обобщенных координат РМ, в которой в}$$

свою очередь будем различать две подгруппы:

- $\{q_r\} = q_{ir}$ ,  $i_r = 1, 2, \dots, n_b$  – ОК РМ, не связанные непосредственно с КМ АБУ;
- $\{q_a\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = q_{ia}$ ,  $i_a = 1, \dots, n_a$ ,  $n_a = 2$  – ОК точки  $A$  крепления АБУ к валу

ротора, характеризующие плоско-параллельное движение автобалансира (рисунок 2.1);

2)  $\{\phi\} = \phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  – группа обобщенных координат КМ в АБУ.

Общее количество ОК равно  $n_s = (n_r + n)$ , где  $n$  – число КМ в АБУ;  $n_r = (n_b + n_a)$  – число ОК РМ, в том числе  $n_a = 2$  координат точки  $A$ .

Полный вектор обобщенных координат МС может рассматриваться как совокупность подвекторов ОК подсистемы РМ и подсистемы КМ:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ - \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q_r\} \\ - \\ \{q_a\} \\ - \\ \{\phi\} \end{Bmatrix}. \quad (3.1)$$

Кинетическая энергия всей МС в общем виде может быть представлена в виде суммы энергий подсистем МС:

$$T(\{v\}) = T_R(\{\dot{q}\}, \{q\}, t) + T_{ABU}(\{\dot{q}_a\}, \{\dot{\phi}\}, \{\phi\}), \quad (3.2)$$

где  $(\dot{\phantom{x}}) \equiv d/dt$ ;  $T_R(\{\dot{q}\}, \{q\}, t)$  – кинетическая энергия подсистемы РМ, зависящая от ОК РМ и их скоростей, а также времени  $t$ , поскольку ротор неуравновешен;  $T_{ABU}(\{\dot{q}_a\}, \{\dot{\phi}\}, \{\phi\})$  – кинетическая энергия подсистемы АБУ.

При этом важно, что кинетическая энергия подсистемы АБУ может быть записана в виде конкретного выражения через ОК:

$$T_{ABU}(\{\dot{q}_a\}, \{\dot{\phi}\}, \{\phi\}) = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^n (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2) = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^n [(\dot{x}_A - R\dot{\phi}_j \sin \phi_j)^2 + (\dot{y}_A + R\dot{\phi}_j \cos \phi_j)^2], \quad (3.3)$$

где  $m$  – масса одной КМ;  $x_j, y_j$  – текущие абсолютные координаты  $j$ -й КМ.

Уравнения движения МС в форме уравнений Лагранжа 2-го рода [31, 32]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{v}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial v_i} = F_i, \quad i = 1 \dots n_s, \quad n_s = (n_r + n), \quad (3.4)$$

где  $F_i$  – обобщенная сила, соответствующая  $i$ -й ОК.

Используя принятую выше классификацию ОК и (3.1)-(3.4), выпишем уравнения движения отдельно по координатам подсистем МС:

$$\{q_r\}: \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_R}{\partial \dot{q}_{ir}} \right) - \frac{\partial T_R}{\partial q_{ir}} = F_{ir}(\{q\}, \{\dot{q}\}), \quad i_r = 1 \dots n_b, \quad (3.5)$$

где  $F_{ir}$  – обобщенные силы, соответствующие  $i_r$ -й ОК РМ;

$$\{q_a\}: \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_R}{\partial \dot{q}_{ia}} \right) - \frac{\partial T_R}{\partial q_{ia}} + f_{ia} = F_{ia}(\{q\}, \{\dot{q}\}), \quad i_a = 1 \dots n_a, \quad n_a = 2, \quad (3.6)$$

где  $f_{ia} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{ABU}}{\partial \dot{q}_{ia}} \right)$ ;  $F_{ia}$  – обобщенные силы, соответствующие  $i_a$ -й ОК РМ;

$$\{\varphi\}: \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{ABU}}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) - \frac{\partial T_{ABU}}{\partial \varphi_j} = F_j(\varphi_j), \quad j = 1 \dots n, \quad (3.7)$$

где  $F_j$  – обобщенная сила, соответствующая  $j$ -й ОК КМ;

Зависимость (3.3) позволяет далее получить для величин  $f_{ia}$  в (6) выражения непосредственно через ОК:

$$\begin{aligned} f_1 = f_{xA} &= nm\ddot{x}_A + mR \sum_{j=1}^n (\cos \varphi_j)''', \quad i_a = 1; \\ f_2 = f_{yA} &= nm\ddot{y}_A + mR \sum_{j=1}^n (\sin \varphi_j)''', \quad i_a = 2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Кроме того, уравнения движения по координатам  $\varphi_j$  в (7) также можно выразить непосредственно через ОК:

$$mR(R\ddot{\varphi}_j - \ddot{x}_A \sin \varphi_j + \ddot{y}_A \cos \varphi_j) = F_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (3.9)$$

где  $F_j = -mR^2 h_\varphi (\dot{\varphi}_j - \omega)$  – обобщенная сила (момент) вязкого сопротивления движению КМ в АБУ;  $h_\varphi$  – коэффициент демпфирования КМ в АБУ,  $\text{с}^{-1}$ .

Как известно уравнения Лагранжа могут быть преобразованы к форме системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Тогда на основе (3.5)-(3.9) система уравнений движения МС РМ с АБУ для общего случая принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [M_r] & [M_{ra}] \\ [M_{ar}] & [M_{a\sigma}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_r\} \\ \{\ddot{q}_a\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [H_r] & [H_{ra}] \\ [H_{ar}] & [H_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_r\} \\ \{\dot{q}_a\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_r] & [K_{ra}] \\ [K_{ar}] & [K_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_r\} \\ \{q_a\} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{d_{rc}\} \\ \{d_{ac}\} \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} \{d_{rs}\} \\ \{d_{as}\} \end{Bmatrix} \sin \omega t; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\ddot{\varphi}_j + h_\varphi (\dot{\varphi}_j - \omega) - \frac{1}{R} \ddot{x}_A \sin \varphi_j + \frac{1}{R} \ddot{y}_A \cos \varphi_j = 0, \quad j = 1 \dots n$$

или

$$[M_{\Sigma}]\{\ddot{q}\} + [H]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{d_{rc}\} \\ \{d_{ac}\} \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} \{d_{rs}\} \\ \{d_{as}\} \end{Bmatrix} \sin \omega t; \quad (3.11)$$

$$\ddot{\phi}_j + h_{\phi}(\dot{\phi}_j - \omega) - \frac{1}{R}\ddot{x}_A \sin \phi_j + \frac{1}{R}\ddot{y}_A \cos \phi_j = 0, \quad j = 1 \dots n,$$

где  $\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q_r\} \\ \{q_a\} \end{Bmatrix}$ ;  $[M_{\Sigma}] = \begin{bmatrix} [M_r] & [M_{ra}] \\ [M_{ar}] & [M_{a\Sigma}] \end{bmatrix}$ ;  $[H] = \begin{bmatrix} [H_r] & [H_{ra}] \\ [H_{ar}] & [H_a] \end{bmatrix}$ ;  $[K] = \begin{bmatrix} [K_r] & [K_{ra}] \\ [K_{ar}] & [K_a] \end{bmatrix}$ ;

$$[M_{a\Sigma}] = [M_a] + nm[E]; \quad \{f_a\} = \begin{Bmatrix} mR \sum_{j=1}^n (\cos \phi_j)'' \\ mR \sum_{j=1}^n (\sin \phi_j)'' \end{Bmatrix};$$

$[M_{\Sigma}]$ ,  $[H]$ ,  $[K]$  – квадратные матрицы инерции, демпфирования (и/или гироскопичности) и жесткости роторной машины размером  $(n_r, n_r)$ , где  $n_r = n_b + n_a$ ,  $n_a = 2$ ;  $\{d_{rc}\}$ ,  $\{d_{rs}\}$ ,  $\{d_{ac}\}$ ,  $\{d_{as}\}$  – векторы статического и динамического дисбалансов ротора РМ;  $[E]$  – единичная матрица размером  $(2,2)$ .

Системы уравнений (3.10) и (3.11) представлены с использованием блочно-матричной формы записи как наиболее удобной и наглядной при изучении МС с многими степенями свободы. Дадим некоторые пояснения к ним.

Квадратные матрицы  $[M_{\Sigma}]$ ,  $[H]$ ,  $[K]$  в соответствии с логикой принятой классификации ОК разбиты на соответствующие блоки (подматрицы) и считаются постоянными. При этом подматрицы имеют следующие размеры:

- подматрицы  $[M_r]$ ,  $[H_r]$ ,  $[K_r]$  – квадратные размером  $(n_b, n_b)$ ;
- подматрицы  $[M_{a\Sigma}]$ ,  $[H_a]$ ,  $[K_a]$  – квадратные размером  $(n_a, n_a)$ ,  $n_a = 2$ ;
- подматрицы  $[M_{ra}]$ ,  $[H_{ra}]$ ,  $[K_{ra}]$  – прямоугольные размером  $(n_b, n_a)$ ;
- подматрицы  $[M_{ar}]$ ,  $[H_{ar}]$ ,  $[K_{ar}]$  – прямоугольные размером  $(n_a, n_b)$ .

Отметим, что матрицы  $[H]$  и  $[K]$  в точности соответствуют собственно роторной машине (без АБУ), а матрица  $[M_{\Sigma}]$  лишь слабо отличается от матрицы инерции РМ, поскольку общая масса КМ обычно существенно меньше массы РМ.

Таким образом, полученная в общем виде система уравнений (3.10) (или (3.11)) описывает движение МС произвольной роторной машины с автобалансиром пассивного типа. В структуре этих уравнений достаточно четко выделяются группы уравнений двух подсистем МС: первые  $n_r$  уравнений движения РМ (записанные в матричной форме) и последние  $n$  уравнений движения КМ в АБУ. Связь между

подсистемами осуществляется посредством величин  $\{f_a\}$ ,  $nm[E]$ ,  $\ddot{x}_A$ ,  $\ddot{y}_A$  и носит несимметричный инерционный характер.

Важно отметить, что независимо от устройства и сложности конкретной РМ, уравнения движения КМ АБУ и их связь с подсистемой РМ всегда имеют одинаковый вид (инвариантны по отношению к подсистеме РМ). Данное обстоятельство создает основу для разработки единого общего подхода к изучению динамики АБУ, установленного на произвольную роторную машину, и выявлению фундаментальных закономерностей. Эта возможность является следствием принятой выше системы классификации ОК МС, благодаря чему удается кинетическую энергию подсистемы АБУ выразить явным образом через конкретные ОК.

#### 4. УРАВНЕНИЯ АБСОЛЮТНО СИНХРОННОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Под абсолютно синхронным движением МС РМ с АБУ будем понимать такое движение, при котором КМ неподвижны относительно ротора и движутся абсолютно синхронно с ним. В этом случае, очевидно, ОК КМ имеют вид:

$$\varphi_j = \omega t + \alpha_j, \quad j = 1 \dots n, \quad \text{где } \alpha_j = \text{const}. \quad (4.1)$$

Уравнения абсолютно синхронного движения МС с учетом (4.1) и (3.11):

$$\begin{aligned} [M_\Sigma] \{\ddot{q}\} + [H] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_a^*\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{d_{rc}\} \\ \{d_{ac}\} \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} \{d_{rs}\} \\ \{d_{as}\} \end{Bmatrix} \sin \omega t; \\ -\ddot{x}_A \sin(\omega t + \alpha_j) + \ddot{y}_A \cos(\omega t + \alpha_j) &= 0, \quad j = 1 \dots n, \end{aligned} \quad (4.2)$$

или

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [M_r] & [M_{ra}] \\ [M_{ar}] & [M_{a\Sigma}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}_r\} \\ \{\ddot{q}_a\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [H_r] & [H_{ra}] \\ [H_{ar}] & [H_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}_r\} \\ \{\dot{q}_a\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_r] & [K_{ra}] \\ [K_{ar}] & [K_a] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q_r\} \\ \{q_a\} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_a^*\} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \{d_{rc}\} \\ \{d_{ac}\} \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} \{d_{rs}\} \\ \{d_{as}\} \end{Bmatrix} \sin \omega t; \\ -\ddot{x}_A \sin(\omega t + \alpha_j) + \ddot{y}_A \cos(\omega t + \alpha_j) &= 0, \quad j = 1 \dots n, \end{aligned}$$

где

$$\{f_a^*\} = \begin{Bmatrix} -mR\omega^2 \sum_{j=1}^n \cos(\omega t + \alpha_j) \\ -mR\omega^2 \sum_{j=1}^n \sin(\omega t + \alpha_j) \end{Bmatrix} = -mR\omega^2 \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j \\ \sum_{j=1}^n \sin \alpha_j \end{pmatrix} \cos \omega t + \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^n \sin \alpha_j \\ \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j \end{pmatrix} \sin \omega t.$$

Система (4.2) линейная, поэтому вынужденное движение её ОК происходит гармонически с частотой  $\omega$ . Свободные колебания не учитываем, поскольку они затухающие.

В силу линейности (4.2) координаты точки  $A$  должны подчиняться закону

$$\{q_a\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{AC} \\ Y_{AC} \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} X_{AS} \\ Y_{AS} \end{Bmatrix} \sin \omega t .$$

Уточним соотношения между амплитудами  $X_{AC}$ ,  $X_{AS}$ ,  $Y_{AC}$ ,  $Y_{AS}$ , допустимые для данного режима движения МС. Подставив последнее выражение в уравнение для  $j$ -й КМ в (4.2), получаем

$$\begin{aligned} & (X_{AC} + Y_{AS}) \sin \alpha_j + (X_{AS} - Y_{AC}) \cos \alpha_j + \\ & + (X_{AC} - Y_{AS}) \sin(2\omega t + \alpha_j) - (X_{AS} + Y_{AC}) \cos(2\omega t + \alpha_j) = 0, \quad j = 1 \dots n. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Данное уравнение должно тождественно выполняться в любой момент времени  $t$ . Физически это означает условие отсутствия сил, способных сместить КМ относительно ротора. Отсюда следует, что должны выполняться соотношения:

$$Y_{AS} = X_{AC}; \quad Y_{AC} = -X_{AS}.$$

С учетом этого получаем, что координаты  $x_A$  и  $y_A$  изменяются по закону

$$\{q_a\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{AC} \\ -X_{AS} \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} X_{AS} \\ X_{AC} \end{Bmatrix} \sin \omega t, \quad (4.4)$$

а уравнения для КМ в (4.2) преобразуются к виду, не зависящему от  $t$ :

$$X_{AC} \sin \alpha_j + X_{AS} \cos \alpha_j = 0 \quad \text{или} \quad A_A \sin(\alpha_j + \Theta) = 0, \quad j = 1 \dots n, \quad (4.5)$$

где  $A_A = \sqrt{X_{AC}^2 + X_{AS}^2}$ ;  $\Theta = \text{arctg} \frac{X_{AS}}{X_{AC}}$ .

КМ должны так располагаться относительно ротора, чтобы для каждой из них выполнялось равенство (4.5). Существует два существенно различных варианта расположения КМ:

1) режим диаметрального расположения КМ, при котором

$$\alpha_j = -\Theta + k\pi, \quad j = 1 \dots n; \quad A_A \neq 0;$$

2) режим автобалансировки точки  $A$  ротора, при котором

$$X_{AC} = X_{AS} = 0, \quad (4.6)$$

а следовательно  $A_A = 0$ ;  $x_A(t) \equiv 0$ ;  $y_A(t) \equiv 0$ ;  $\{q_a\} \equiv 0$ ;  $\{q\} \equiv \begin{Bmatrix} \{q_r\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$ .

Отметим, что автобалансируется прежде всего точка  $A$  крепления АБУ к ротору. Автобалансировка же всего ротора с помощью одного автобалансира возможна не на всех роторных машинах.

4.2. Получим для общего случая выражения, характеризующие расположения КМ в АБУ в режиме идеальной автобалансировки. При этом режиме уравнения движения КМ в (4.2) тождественно выполняются независимо от угловых констант  $\alpha_j$  в силу (4.6), т.е. вследствие отсутствия колебаний точки  $A$ . Поэтому геометрия расположения КМ определяется только уравнениями движения РМ и в общем случае только для суммарных характеристик положения общего центра масс КМ в АБУ:

$$\Sigma_C = \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j ; \quad \Sigma_S = \sum_{j=1}^n \sin \alpha_j . \quad (4.7)$$

Запишем уравнениями движения РМ в (4.2) с учетом равенства  $\{q_a\} \equiv 0$  в (4.6):

$$\begin{aligned} [M_r] \{\ddot{q}_r\} + [H_r] \{\dot{q}_r\} + [K_r] \{q_r\} &= \{d_{rc}\} \cos \omega t + \{d_{rs}\} \sin \omega t ; \\ [M_{ar}] \{\ddot{q}_r\} + [H_{ar}] \{\dot{q}_r\} + [K_{ar}] \{q_r\} &= (\{d_{ac}\} + mR\omega^2 \{\sigma_c\}) \cos \omega t + (\{d_{as}\} + mR\omega^2 \{\sigma_s\}) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\text{где } \{\sigma_c\} = \begin{Bmatrix} \Sigma_C \\ \Sigma_S \end{Bmatrix} ; \quad \{\sigma_s\} = \begin{Bmatrix} -\Sigma_S \\ \Sigma_C \end{Bmatrix} .$$

Здесь первая группа уравнений (в количестве  $n_b$ ) однозначно определяет вектор переменных  $\{q_r(t)\}$ :

$$\{q_r\} = \{Q_{rc}\} \cos \omega t + \{Q_{rs}\} \sin \omega t , \quad (4.9)$$

где

$$\begin{Bmatrix} \{Q_{rc}\} \\ \{Q_{rs}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_r] & \omega[H_r] \\ -\omega[H_r] & [S_r] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{d_{rc}\} \\ \{d_{rs}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [G_r] \left( \{d_{rc}\} - \omega[H_r][S_r]^{-1}\{d_{rs}\} \right) \\ [G_r] \left( \{d_{rs}\} + \omega[H_r][S_r]^{-1}\{d_{rc}\} \right) \end{Bmatrix} ,$$

$$[S_r] = [K_r] - \omega^2 [M_r] ; \quad [G_r] = ([S_r] + \omega^2 [H_r][S_r]^{-1}[H_r])^{-1} .$$

Из второй группы уравнений в (4.8) можем выразить искомые постоянные геометрические векторы:

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma_c\} \\ \{\sigma_s\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{mR\omega^2} \left( \begin{bmatrix} [S_{ar}] & \omega[H_{ar}] \\ -\omega[H_{ar}] & [S_{ar}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q_{rc}\} \\ \{Q_{rs}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{d_{ac}\} \\ \{d_{as}\} \end{Bmatrix} \right) , \quad (4.10)$$

$$\text{где } [S_{ar}] = [K_{ar}] - \omega^2 [M_{ar}] .$$

При этом, однако, надо учесть, что геометрические векторы  $\{\sigma_c\}$  и  $\{\sigma_s\}$  по сути состоят из одинаковых элементов (см.(4.8)) и связаны между собой равенством:

$$\{\sigma_s\} = [E_c] \{\sigma_c\}, \quad \text{где } [E_c] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Поэтому, учитывая (4.10) и (4.11), характеристики положения общего ЦМ КМ в АБУ могут быть найдены двумя способами, которые должны давать одинаковый результат:

$$\{\sigma_c\} = \frac{1}{mR\omega^2} \left( [S_{ar}] \{Q_{rc}\} + \omega [H_{ar}] \{Q_{rs}\} - \{d_{ac}\} \right) \quad (4.10)$$

или

$$\{\sigma_c\} = -\frac{1}{mR\omega^2} [E_c] \left( [S_{ar}] \{Q_{rs}\} - \omega [H_{ar}] \{Q_{rc}\} - \{d_{as}\} \right).$$

Отсюда можно сформулировать общие формальные требования к РМ, при выполнении которых имеется потенциальная возможность автобалансировки точки ротора с помощью одного шарикового (маятникового) АБУ:

$$\begin{aligned} & ([S_{ar}] - \omega [E_c] [H_{ar}]) \{Q_{rc}\} + ([E_c] [S_{ar}] + \omega [H_{ar}]) \{Q_{rs}\} - \{d_{ac}\} - [E_c] \{d_{as}\} = 0; \\ & \|\{\sigma_c\}\| = (\Sigma_C^2 + \Sigma_S^2)^{1/2} \leq n^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\|\{\sigma_c\}\|$  – евклидова норма вектора.

Здесь первое условие соответствует принципиальной возможности автобалансировки, а второе условие – требованию достаточной емкости АБУ.

В частном случае, если не учитывать влияние демпфирования и гироскопического эффекта, формулы (4.10) и (4.11) упрощаются:

$$\{\sigma_c\} = \frac{1}{mR\omega^2} \left( [S_{ar}] [S_r]^{-1} \{d_{rc}\} - \{d_{ac}\} \right) = \frac{-1}{mR\omega^2} [E_c] \left( [S_{ar}] [S_r]^{-1} \{d_{rs}\} - \{d_{as}\} \right) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & [S_{ar}] [S_r]^{-1} \{d_{rc}\} + [E_c] [S_{ar}] [S_r]^{-1} \{d_{rs}\} - \{d_{ac}\} - [E_c] \{d_{as}\} = 0; \\ & \|\{\sigma_c\}\| = (\Sigma_C^2 + \Sigma_S^2)^{1/2} \leq n^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

В целом формулы, полученные в данном разделе, позволяют в общем случае проверить принципиальную возможность автобалансировки точки ротора с помощью одного АБУ и определить геометрические параметры расположения КМ в АБУ в режиме синхронной автобалансировки.

Отметим, также что формулы (4.9) имеют и другое самостоятельное значение. Они позволяют оценить изменение динамических характеристик колебаний ротора целиком (а не только точки А), нагрузок в его опорах и виброактивности всей РМ в результате установки автобалансира.

## 5. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ. ПЕРЕХОД К СУММАРНЫМ КООРДИНАТАМ КОМПЕНСИРУЮЩИХ МАСС.

Выше для общего случая произвольной РМ были получены уравнения невозмущенного движения (3.11) (или (3.10)). Далее было показано, что эти уравнения при некоторых дополнительных условиях допускают такой частный случай решения как абсолютно синхронное автобалансирующее движение механической системы. В этом случае уравнения движения преобразуются к виду (4.2), а обобщенные координаты МС изменяются согласно выражениям:

$$\begin{aligned} \{q_r\} &= \{\tilde{q}_r(t)\} \text{ согласно (4.9);} \\ \{q_a\} &= \{\tilde{q}_a(t)\} = \begin{Bmatrix} \tilde{x}_A(t) \\ \tilde{y}_A(t) \end{Bmatrix} \equiv 0; \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\varphi_j = \tilde{\varphi}_j(t) = \omega t + \alpha_j, \quad j = 1 \dots n, \quad \text{где } \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j, \sum_{j=1}^n \sin \alpha_j \text{ согласно (4.10).}$$

Имея в виду последующий анализ проблемы устойчивости, перейдем теперь к выводу уравнений возмущенного движения в общем виде (причем будет получено несколько их вариантов).

Дадим вариации обобщенным координатам:

$$\begin{aligned} \{q_r\} &= \{\tilde{q}_r\} + \{\delta q_r\}; \\ \{q_a\} &= \{\tilde{q}_a(t)\} + \{\delta q_a\} = \{\delta q_a\} = \begin{Bmatrix} \delta x_A \\ \delta y_A \end{Bmatrix}; \\ \varphi_j &= \tilde{\varphi}_j + \psi_j = \omega t + \alpha_j + \psi_j, \quad j = 1 \dots n, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $\{\delta q_r\}$ ,  $\{\delta q_a\}$  и  $\delta \varphi_j = \psi_j$  – вариации ОК.

Далее подставляем (5.2) в (3.11) и получаем уравнения возмущенного движения в исходном нелинейном виде:

$$\begin{aligned} [M_\Sigma] \{\delta \ddot{q}\} + [H] \{\delta \dot{q}\} + [K] \{\delta q\} + mR \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\ddot{s}_a\} \end{Bmatrix} &= \{0\}; \\ \ddot{\psi}_j + h_\varphi \dot{\psi}_j - \frac{1}{R} \delta \ddot{x}_A \sin(\omega t + \alpha_j + \psi_j) + \frac{1}{R} \delta \ddot{y}_A \cos(\omega t + \alpha_j + \psi_j) &= 0, \quad j = 1 \dots n, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\text{где } \{\delta q\} = \begin{Bmatrix} \{\delta q_r\} \\ \{\delta q_a\} \end{Bmatrix}; \quad \{s_a\} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^n (\cos(\omega t + \alpha_j + \psi_j) - \cos(\omega t + \alpha_j)) \\ \sum_{j=1}^n (\sin(\omega t + \alpha_j + \psi_j) - \sin(\omega t + \alpha_j)) \end{Bmatrix}.$$

Нелинейными слагаемыми здесь являются вектор  $\{s_a\}$  и последние два слагаемых в уравнениях для КМ.

Уравнения возмущенного движения в первом приближении получаем на основе (5.3) путем линеаризации с учетом малости вариаций ОК:

$$\begin{aligned} [M_\Sigma] \{\delta\ddot{q}\} + [H] \{\delta\dot{q}\} + [K] \{\delta q\} + mR \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\dot{f}_a\} \end{Bmatrix} &= \{0\}; \\ \ddot{\psi}_j + h_\varphi \dot{\psi}_j - \frac{1}{R} \delta\ddot{x}_A \sin(\omega t + \alpha_j) + \frac{1}{R} \delta\dot{y}_A \cos(\omega t + \alpha_j) &= 0, \quad j = 1 \dots n, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\{f_a\} = \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^n \psi_j \sin(\omega t + \alpha_j) \\ \sum_{j=1}^n \psi_j \cos(\omega t + \alpha_j) \end{Bmatrix}; \quad \{\dot{f}_a\} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^n (-(\dot{\psi}_j - \omega^2 \psi_j) \sin(\omega t + \alpha_j) - 2\omega \psi_j \cos(\omega t + \alpha_j)) \\ \sum_{j=1}^n ((\dot{\psi}_j - \omega^2 \psi_j) \cos(\omega t + \alpha_j) - 2\omega \psi_j \sin(\omega t + \alpha_j)) \end{Bmatrix}.$$

Анализ системы линейных уравнений (5.4) в общем случае затрудняется неопределенностью количества уравнений и неизвестных в ней, которое зависит от числа КМ  $n$ . Покажем, что существует возможность перейти от системы (5.4) к эквивалентной системе дифференциальных уравнений с минимально возможным числом неизвестных функций независимо от параметра  $n$ .

Введем две новые ОК – суммарные обобщенные координаты КМ:

$$\{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^n \psi_j \sin \alpha_j \\ \sum_{j=1}^n \psi_j \cos \alpha_j \end{Bmatrix}. \quad (5.5)$$

По физическому смыслу новые переменные характеризуют смещение общего центра масс всех КМ от его положения при идеальной (синхронной) автобалансировке в системе координат, вращающейся вместе с ротором:  $\Psi_s$  – вдоль линии обобщенного дисбаланса ротора,  $\Psi_c$  – поперек этой линии.

Переменные  $\Psi_s$ ,  $\Psi_c$  уже фактически имеются в уравнениях движения РМ в (5.4). Рассмотрим далее уравнение для  $j$ -й КМ, которое для удобства представим в виде:

$$\ddot{\psi}_j + h_\varphi \dot{\psi}_j - \frac{1}{R} (\delta\ddot{x}_A \cos \omega t + \delta\dot{y}_A \sin \omega t) \sin \alpha_j + \frac{1}{R} (-\delta\ddot{x}_A \sin \omega t + \delta\dot{y}_A \cos \omega t) \cos \alpha_j = 0.$$

Умножим это уравнение  $\sin \alpha_j$  на и просуммируем его по всем КМ  $j=1 \dots n$ . То же самое сделаем, умножая на  $\cos \alpha_j$ . Тогда после преобразований получаем два

уравнения с суммарными обобщенными координатами КМ (которые также могут быть представлены в матричной форме):

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi}_s + h_\varphi \dot{\Psi}_s + \frac{n - D_c}{2R} (\delta \ddot{x}_A \cos \omega t + \delta \ddot{y}_A \sin \omega t) - \frac{D_s}{2R} (-\delta \dot{x}_A \sin \omega t + \delta \dot{y}_A \cos \omega t) &= 0; \\ \ddot{\Psi}_c + h_\varphi \dot{\Psi}_c - \frac{D_s}{2R} (\delta \ddot{x}_A \cos \omega t + \delta \ddot{y}_A \sin \omega t) + \frac{n + D_c}{2R} (-\delta \dot{x}_A \sin \omega t + \delta \dot{y}_A \cos \omega t) &= 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $D_c = \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j$ ;  $D_s = \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j$ .

Используя введенные суммарные ОК КМ, система уравнений возмущенного движения в первом приближении может быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} [M_\Sigma] \{\delta \ddot{q}\} + [H] \{\delta \dot{q}\} + [K] \{\delta q\} + mR \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\ddot{f}_a\} \end{Bmatrix} = \{0\}; \\ \{\ddot{\Psi}\} + h_\varphi \{\dot{\Psi}\} + \frac{1}{2R} [d_c] [T]^{-1} \{\delta \ddot{q}_a\} = 0; \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\ddot{\Psi}_j + h_\varphi \dot{\Psi}_j - \frac{1}{R} \delta \ddot{x}_A \sin(\omega t + \alpha_j) + \frac{1}{R} \delta \ddot{y}_A \cos(\omega t + \alpha_j) = 0, \quad j = 3 \dots n,$$

где

$$\begin{aligned} \{\Psi\} = \begin{Bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_c \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^n \Psi_j \sin \alpha_j \\ \sum_{j=1}^n \Psi_j \cos \alpha_j \end{Bmatrix}; \quad \{f_a\} = [T] \{\Psi\}; \quad \{\ddot{f}_a\} = [T] (\{\ddot{\Psi}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{\Psi}\} - \omega^2 \{\Psi\}); \\ [d_c] &= \begin{bmatrix} (n - D_c) & -D_s \\ -D_s & (n + D_c) \end{bmatrix}; \quad D_c = \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j; \quad D_s = \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j; \quad [E_c] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ [T(t)] &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}; \quad [T(t)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что первые два матричных уравнения в (5.7) образуют полностью замкнутую систему, не зависящую от остальных уравнений. Поэтому исследование устойчивости автобалансировки МС РМ с АБУ эквивалентно анализу только этих уравнений. В результате перехода к суммарным ОК КМ количество анализируемых уравнений сокращается до конкретной для рассматриваемой РМ величины  $(n_r + 2) = (n_b + n_a + 2)$  независимо от того сколько КМ имеется в АБУ. Это же касается и спектра характеристических чисел, собственных частот и форм колебаний. В частности для базовой (простейшей) модели МС РМ с АБУ их число равно 4.

С учетом указанного окончательно запишем систему дифференциальных уравнений возмущенного движения МС в первом приближении с суммарными ОК КМ, используя для удобства и наглядности блочно-матричную форму записи:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [M_r] & [M_{ra}] & [0] \\ [M_{ar}] & [M_{a\Sigma}] & mR[T] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c][T]^{-1} & [E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\ddot{q}_r\} \\ \{\delta\ddot{q}_a\} \\ \{\ddot{\psi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [H_r] & [H_{ra}] & [0] \\ [H_{ar}] & [H_a] & 2mR\omega[T][E_c] \\ [0] & [0] & h_\phi[E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\dot{q}_r\} \\ \{\delta\dot{q}_a\} \\ \{\dot{\psi}\} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} [K_r] & [K_{ra}] & [0] \\ [K_{ar}] & [K_a] & -mR\omega^2[T] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta q_r\} \\ \{\delta q_a\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \{0\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь и далее  $[E]$  – единичная матрица размером (2,2). Система (5.8) будет использоваться в качестве исходной при дальнейшем анализе устойчивости.

Для удобства приведем некоторые свойства матриц, входящих в (5.7) и (5.8):

$$\begin{aligned} |T| = 1; \quad [\dot{T}] = \omega[T][E_c]; \quad [\ddot{T}] = -\omega^2[T]; \quad ([T]^{-1})' = -\omega[T]^{-1}[E_c]; \quad ([T]^{-1})'' = -\omega^2[T]^{-1}; \\ [E_c]^2 = -[E]; \quad [E_c]^{-1} = -[E_c]; \quad |E_c| = 1; \quad [T][E_c] = [E_c][T], \end{aligned} \quad (5.9)$$

где  $(\dot{\phantom{x}}) \equiv (\phantom{x})' \equiv d/dt$ .

Отметим, что матрица  $[T(t)]$  является матрицей перехода от неподвижной системы координат к координатам, вращающимся с угловой скоростью  $\omega$ , а матрица  $[E_c]$  является матричным аналогом мнимой единицы.

Сделаем несколько замечаний относительно уравнений (5.8).

1. Структурно система уравнений возмущенного движения разделяется уравнения движения подсистемы РМ и подсистемы КМ АБУ. Спецификой колебаний подсистемы КМ является отсутствие восстанавливающей силы (нулевая диагональная подматрица в матрице жесткости). Взаимосвязь между подсистемами в целом носит несимметричный характер. Подсистема РМ влияет на движения КМ только инерционным образом. В то же время подсистема КМ влияет на движение РМ через все разновидности коэффициентов.

2. В уравнениях (5.8) имеются переменные периодические коэффициенты, изменяющиеся с частотой  $\omega$ . Это обстоятельство вызывает заметные трудности аналитического исследования устойчивости в общем случае. Примечательно также, что периодические коэффициенты входят только в подматрицы взаимосвязей подсистем.

3. Описанный выше переход к суммарным ОК КМ применялся ранее автором при анализе базовой (простейшей) модели МС ротора с АБУ. Однако можно показать, что это не единственный способ формирования суммарных ОК КМ. Ниже приведен другой вариант введения суммарных координат иного вида.

Рассмотрим суммарные ОК КМ следующего вида:

$$\{f_a\} = \begin{Bmatrix} f_{as} \\ f_{ac} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^n \psi_j \sin(\omega t + \alpha_j) \\ \sum_{j=1}^n \psi_j \cos(\omega t + \alpha_j) \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

Вектор  $\{f_a\}$  в явном виде присутствует в (5.7). Физический смысл суммарных координат  $\{f_a\}$  такой же, что и  $\{\psi\}$ , но для неподвижной системы координат. Можно убедиться, что между  $\{f_a\}$  и  $\{\psi\}$  существует взаимосвязь вида:

$$\{f_a\} = [T] \{\psi\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\psi\} = [T]^{-1} \{f_a\} \quad (5.11)$$

откуда с учетом свойств (5.9) имеем

$$\{\dot{\psi}\} = [T]^{-1} \left( \{\dot{f}_a\} - \omega [E_c] \{f_a\} \right); \quad \{\ddot{\psi}\} = [T]^{-1} \left( \{\ddot{f}_a\} - 2\omega [E_c] \{\dot{f}_a\} - \omega^2 \{f_a\} \right).$$

Подставив (5.11) в (5.7), получаем еще один вариант формулировки уравнений возмущенного движения с использованием суммарных ОК  $\{f_a\}$ :

$$\begin{aligned} [M_\Sigma] \{\delta\ddot{q}\} + [H] \{\delta\dot{q}\} + [K] \{\delta q\} + mR \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\ddot{f}_a\} \end{Bmatrix} &= \{0\}; \\ \{\ddot{f}_a\} + (h_\varphi [E] - 2\omega [E_c]) \{\dot{f}_a\} - (\omega^2 [E] + h_\varphi \omega [E_c]) \{f_a\} + \frac{1}{2R} [T] [d_c] [T]^{-1} \{\delta\ddot{q}_a\} &= 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где

$$[T] [d_c] [T]^{-1} = \begin{bmatrix} n - D_c \cos 2\omega t + D_s \sin 2\omega t & -D_c \sin 2\omega t - D_s \cos 2\omega t \\ -D_c \sin 2\omega t - D_s \cos 2\omega t & n + D_c \cos 2\omega t - D_s \sin 2\omega t \end{bmatrix}.$$

Как видим в (5.12) сохранилась периодичность коэффициентов, однако по сравнению с (5.7) и (5.8), частота их изменения стала равна  $2\omega$ . Кроме того, структурно периодические коэффициенты сконцентрированы только в уравнениях подсистемы КМ в слагаемых, учитывающих влияние на КМ подсистемы ротора. Уравнения движения подсистемы РМ содержат только постоянные коэффициенты. В остальном особенности (5.12) качественно такие же, что и (5.7) и (5.8).

Итак, основным итогом данного раздела является полученная система уравнений возмущенного движения с использованием суммарных ОК КМ в форме (5.8) или (5.7).

## 6. ПЕРЕХОД К УРАВНЕНИЯМ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Полученная выше система дифференциальных уравнений возмущенного движения содержит периодические коэффициенты. Исследование устойчивости уравнений с переменными коэффициентами сталкивается с повышенными трудностями. Методы общей теории устойчивости движения для таких задач отличаются низкой эффективностью и высокой сложностью. Поэтому в подобных ситуациях обычно пытаются каким-либо способом преобразовать исходную систему к системе уравнений с постоянными коэффициентами. Теоретически согласно Ляпунову такое преобразование всегда существует, хотя общего способа его осуществления к настоящему времени не получено, несмотря на определенные успехи в этой области [27-30, 33 и пр.]. Несмотря на очевидные недостатки такого подхода (отсутствие общего метода перехода, повышение трудоемкости, усложнение формул для коэффициентов, что затрудняет последующее аналитическое определение границ устойчивости), во многих случаях это единственный реальный способ анализа устойчивости МС.

В данном разделе обсуждаются возможности перехода к уравнениям с постоянными коэффициентами для общего случая МС РМ с АБУ. В качестве исходных будем использовать уравнения возмущенного движения в первом приближении с суммарными ОК КМ в форме (5.8) или (5.7).

Переход к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами осуществляется путем некоторой замены переменных. В силу отсутствия общего способа формирования матрицы перехода, попытаемся «сконструировать» один из ее вариантов, исходя из следующих соображений.

В уравнения возмущенного движения (5.8) периодические коэффициенты входят в виде матриц  $[T]$  и  $[T]^{-1}$ , представляющих собой матрицы перехода от неподвижных координат к системе координат, вращающейся синхронно с ротором, и обратно. Отметим, что именно переход к вращающейся системе координат применялся абсолютным большинством авторов при исследовании базовой модели МС РМ с АБУ [1, 12, 19 и пр.]. Причем преобразованию фактически подвергаются только переменные РМ (в общем случае векторы  $\{q_a\}$  и  $\{q_r\}$ ). Обобщенные координаты КМ  $\{\psi\}$  отсчитываются во вращающейся системе и поэтому нет необходимости их

преобразовывать.

С учетом общей структуры уравнений (5.7) и высказанных соображений, естественным образом будем предполагать, что необходимая замена переменных представляет собой:

$$\{\delta q\} = \begin{Bmatrix} \{\delta q_r\} \\ \{\delta q_a\} \end{Bmatrix} = [T_s] \{w\} = \begin{bmatrix} [T_r] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_r\} \\ \{w_a\} \end{Bmatrix}, \quad (6.1)$$

или

$$\{\delta q_r\} = [T_s] \{w_r\}; \quad \{\delta q_a\} = [T] \{w_a\},$$

где

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} \{w_r\} \\ \{w_a\} \end{Bmatrix}; \quad [T_s] = \begin{bmatrix} [T_r] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix}; \quad [T] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}; \quad [T_s]^{-1} = \begin{bmatrix} [T_r]^{-1} & [0] \\ [0] & [T]^{-1} \end{bmatrix};$$

$[T_s]$  – общая блочно диагональная матрица преобразования вектора ОК КМ;  $\{w\}$  – вектор новых ОК РМ, состоящий из подвекторов  $\{w_r\}$  и  $\{w_a\}$ , аналогично исходным ОК РМ;  $[T_r]$ ,  $[T]$  – матрицы преобразования векторов  $\{\delta q_r\}$  и  $\{\delta q_a\}$  в  $\{w_r\}$  и  $\{w_a\}$  соответственно, причем независимо друг от друга.

Здесь матрица  $[T(t)]$  известна (задана) и обеспечивает устранение периодических коэффициентов в уравнениях движения подсистемы КМ в (5.7), (5.8). Матрица  $[T_r(t)]$  подлежит определению в зависимости от конкретного устройства роторной машины.

Отметим, что здесь и далее в обозначениях новых переменных  $\{w\}$ ,  $\{w_r\}$  и  $\{w_a\}$  опущен знак вариации « $\delta$ » для упрощения формы записи.

Выше было указано, что производные матрицы  $[T]$  могут быть выражены через саму матрицу (см. (5.9)):

$$[\dot{T}] = \omega [T] [E_c] = \omega [E_c] [T]; \quad [\ddot{T}] = -\omega^2 [T]. \quad (6.2)$$

Будем полагать, что матрица  $[T_r]$  обладает аналогичными свойствами:

$$[\dot{T}_r] = \omega_r [T_r] [E_R]; \quad [\ddot{T}_r] = \omega_r^2 [T_r] [E_R]^2 \quad \text{или} \quad [\dot{T}_r] = \omega_r [E_L] [T_r]; \quad [\ddot{T}_r] = \omega_r^2 [E_R]^2 [T_r], \quad (6.3)$$

где  $[E_R]$ ,  $[E_L]$  – некоторые постоянные матрицы.

Тогда для общей матрицы перехода справедливо:

$$[\dot{T}_s] = [T_s] [N_R]; \quad [\ddot{T}_s] = [T_s] [N_R]^2 \quad \text{или} \quad [\dot{T}_s] = [N_L] [T_s]; \quad [\ddot{T}_s] = [N_L]^2 [T_s], \quad (6.4)$$

где  $[N_R] = \begin{bmatrix} \omega_r [E_R] & [0] \\ [0] & \omega [E_c] \end{bmatrix}$ ;  $[N_L] = \begin{bmatrix} \omega_r [E_L] & [0] \\ [0] & \omega [E_c] \end{bmatrix}$  – постоянные матрицы.

С учетом (6.2)-(6.4) производные от вектора переменных  $\{\delta q\}$ :

$$\begin{aligned} \{\delta \dot{q}\} &= [T_s] \{\dot{w}\}; \quad \{\delta \ddot{q}\} = [T_s] \{\ddot{w}\} + [\dot{T}_s] \{\dot{w}\} = [T_s] (\{\ddot{w}\} + [N_R] \{\dot{w}\}); \\ \{\delta \ddot{q}\} &= [T_s] \{\ddot{w}\} + 2[\dot{T}_s] \{\dot{w}\} + [\ddot{T}_s] \{w\} = [T_s] (\{\ddot{w}\} + 2[N_R] \{\dot{w}\} + [N_R]^2 \{w\}), \end{aligned} \quad (6.5)$$

а производные от подвектора переменных  $\{\delta q_a\}$ :

$$\begin{aligned} \{\delta \dot{q}_a\} &= [T] \{\dot{w}_a\}; \quad \{\delta \ddot{q}_a\} = [T] \{\ddot{w}_a\} + [\dot{T}] \{\dot{w}_a\} = [T] (\{\ddot{w}_a\} + \omega [E_c] \{\dot{w}_a\}); \\ \{\delta \ddot{q}_a\} &= [T] \{\ddot{w}_a\} + 2[\dot{T}] \{\dot{w}_a\} + [\ddot{T}] \{w_a\} = [T] (\{\ddot{w}_a\} + 2\omega [E_c] \{\dot{w}_a\} - \omega^2 \{w_a\}). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Далее подставляем (6.5), (6.6) в уравнения движения (5.7), а также умножаем уравнения движения РМ слева на обратную матрицу  $[T_s]^{-1}$ . Тогда после преобразований получаем уравнения возмущенного движения в новых переменных:

$$\begin{cases} [\tilde{M}_\Sigma] \{\ddot{w}\} + [\tilde{H}] \{\dot{w}\} + [\tilde{K}] \{w\} + mR \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_\psi\} \end{Bmatrix} = \{0\}; \\ \{\ddot{\psi}\} + h_\varphi \{\dot{\psi}\} + \frac{1}{2R} [d_c] (\{\ddot{w}_a\} + 2\omega [E_c] \{\dot{w}_a\} - \omega^2 \{w_a\}) = 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

где  $\{f_\psi\} = \{\ddot{\psi}\} + 2\omega [E_c] \{\dot{\psi}\} - \omega^2 \{\psi\}$ ;  $[\tilde{M}_\Sigma] = [T_s]^{-1} [M_\Sigma] [T_s]$ ;

$$[\tilde{H}] = [\tilde{\tilde{H}}] + 2[\tilde{M}_\Sigma] [N_R]; \quad [\tilde{\tilde{H}}] = [T_s]^{-1} [H] [T_s];$$

$$[\tilde{K}] = [\tilde{\tilde{K}}] + [\tilde{\tilde{H}}] [N_R] + [\tilde{M}_\Sigma] [N_R]^2; \quad [\tilde{\tilde{K}}] = [T_s]^{-1} [K] [T_s].$$

Здесь в ходе преобразований периодическая матрица  $[T]$  сократилась в уравнениях подсистемы КМ, а также в последнем слагаемом подсистемы РМ. Преобразованные матрицы  $[\tilde{M}_\Sigma]$ ,  $[\tilde{H}]$  и  $[\tilde{K}]$  в общем случае содержат периодические коэффициенты. Однако при выполнении некоторых требований к ним периодические коэффициенты могут взаимно сокращаться и в целом уравнения движения (6.7) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами.

Условия постоянства коэффициентов в преобразованной системе уравнений возмущенного движения для данной РМ при выбранной структуре матрицы перехода:

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_\Sigma] &= [T_s]^{-1} [M_\Sigma] [T_s] = const; \\ [\tilde{\tilde{H}}] &= [T_s]^{-1} [H] [T_s] = const; \quad \text{или} \quad [\dot{\tilde{M}}_\Sigma] = 0; \quad [\dot{\tilde{\tilde{H}}}] = 0; \quad [\dot{\tilde{\tilde{K}}}] = 0. \quad (6.8) \\ [\tilde{\tilde{K}}] &= [T_s]^{-1} [K] [T_s] = const. \end{aligned}$$

Таким образом, для возможности рассматриваемого преобразования необходимо, чтобы МС роторной машины допускала существование такой переменной матрицы  $[T_s]$  структуры (6.1), которая обеспечивает требования (6.8) одновременно для трех матриц исходной модели РМ  $[M_\Sigma]$ ,  $[H]$  и  $[K]$ . Для этого, в частности достаточно свойства перестановочности  $[T_s]$  с каждой из этих матриц.

Безусловно описанный способ перехода к уравнениям с постоянными коэффициентами не является универсальным, однако он применим к целому ряду практически важных моделей МС РМ с АБУ, обладающих осесимметричными свойствами, в том числе с учетом гироскопического эффекта.

## 7. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО ФОРМЫ

В данном и следующем разделах рассматривается проблема аналитического исследования устойчивости автобалансировки по первому приближению на основе уравнений возмущенного движения с постоянными коэффициентами. Предполагается, что предварительно выполнен переход к уравнениям с постоянными коэффициентами способом, описанным в разделе 6, или другим путем.

Перепишем систему уравнений возмущенного движения (6.7) в полной блочно матричной форме (по аналогии с (5.8)):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [\tilde{M}_r] & [\tilde{M}_{ra}] & [0] \\ [\tilde{M}_{ar}] & [\tilde{M}_{a\Sigma}] & mR[E] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c] & [E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{w}_r\} \\ \{\ddot{w}_a\} \\ \{\ddot{\psi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\tilde{H}_r] & [\tilde{H}_{ra}] & [0] \\ [\tilde{H}_{ar}] & [\tilde{H}_a] & 2mR\omega[E_c] \\ [0] & \frac{\omega}{R}[d_c][E_c] & h_\varphi[E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{w}_r\} \\ \{\dot{w}_a\} \\ \{\dot{\psi}\} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} [\tilde{K}_r] & [\tilde{K}_{ra}] & [0] \\ [\tilde{K}_{ar}] & [\tilde{K}_a] & -mR\omega^2[E] \\ [0] & -\frac{\omega^2}{2R}[d_c] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_r\} \\ \{w_a\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \{0\}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где  $[E_c] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $\{w\} = \begin{Bmatrix} \{w_r\} \\ \{w_a\} \end{Bmatrix}$  – вариации обобщенных координат РМ в преобразованной, в частности вращающейся, системе координат; знак вариации «δ» в обозначениях здесь опущен для упрощения записи.

Здесь знаком «~» в обозначениях матриц подчеркивается, что это постоянные

матрицы, полученные в результате преобразования к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Выполним традиционную подстановку вариаций ОК вида:

$$\begin{cases} \{w_r\} \\ \{w_a\} \\ \{\Psi\} \end{cases} = \begin{cases} \{W_r\} \\ \{W_a\} \\ \{\Psi\} \end{cases} e^{\lambda t}, \quad (7.2)$$

где  $\{W_r\}$ ,  $\{W_a\}$ ,  $\{\Psi\}$  – постоянные амплитуды;  $\lambda$  – характеристическое число.

Поставляя (7.2) в (7.1), получаем систему алгебраических уравнений задачи собственных значений в квадратичной форме:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{bmatrix} [\tilde{M}_r] & [\tilde{M}_{ra}] & [0] \\ [\tilde{M}_{ar}] & [\tilde{M}_{a\Sigma}] & mR[E] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c] & [E] \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} [\tilde{H}_r] & [\tilde{H}_{ra}] & [0] \\ [\tilde{H}_{ar}] & [\tilde{H}_a] & 2mR\omega[E_c] \\ [0] & \frac{\omega}{R}[d_c][E_c] & h_\phi[E] \end{bmatrix} \lambda + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} [\tilde{K}_r] & [\tilde{K}_{ra}] & [0] \\ [\tilde{K}_{ar}] & [\tilde{K}_a] & -mR\omega^2[E] \\ [0] & -\frac{\omega^2}{2R}[d_c] & [0] \end{bmatrix} \right) \begin{cases} \{W_r\} \\ \{W_a\} \\ \{\Psi\} \end{cases} = \{0\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

или в форме матриц многочленов ( $\lambda$ -матриц):

$$\begin{bmatrix} [\tilde{A}_r(\lambda)] & [\tilde{A}_{ra}(\lambda)] & [0] \\ [\tilde{A}_{ar}(\lambda)] & [\tilde{A}_{a\Sigma}(\lambda)] & mR\omega[S_\omega(\lambda)] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c][S_\omega(\lambda)] & \lambda(\lambda + h_\phi)[E] \end{bmatrix} \begin{cases} \{W_r\} \\ \{W_a\} \\ \{\Psi\} \end{cases} = \{0\}, \quad (7.4)$$

где

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_r(\lambda)] &= [\tilde{M}_r]\lambda^2 + [\tilde{H}_r]\lambda + [\tilde{K}_r]; & [\tilde{A}_{ra}(\lambda)] &= [\tilde{M}_{ra}]\lambda^2 + [\tilde{H}_{ra}]\lambda + [\tilde{K}_{ra}]; \\ [\tilde{A}_{ar}(\lambda)] &= [\tilde{M}_{ar}]\lambda^2 + [\tilde{H}_{ar}]\lambda + [\tilde{K}_{ar}]; & [\tilde{A}_{a\Sigma}(\lambda)] &= [\tilde{M}_{a\Sigma}]\lambda^2 + [\tilde{H}_a]\lambda + [\tilde{K}_a]; \\ [S_\omega(\lambda)] &= (\lambda^2 - \omega^2)[E] + 2\omega\lambda[E_c]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение (ХУ) для общего случая, записанное в форме определителя от  $\lambda$ -матрицы:

$$\begin{vmatrix} [\tilde{A}_r(\lambda)] & [\tilde{A}_{ra}(\lambda)] & [0] \\ [\tilde{A}_{ar}(\lambda)] & [\tilde{A}_{a\Sigma}(\lambda)] & mR\omega[S_\omega(\lambda)] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c][S_\omega(\lambda)] & \lambda(\lambda + h_\phi)[E] \end{vmatrix} = 0. \quad (7.5)$$

Как видим, структура ХУ в форме (7.5) наглядно отражает наличие в МС двух физических подсистем: РМ и АБУ, а также взаимосвязь между ними. Последняя имеет признаки симметрии (наличие одинаковых матриц  $[S_{\omega}(\lambda)]$  в блоках связи подсистем), однако является несимметричной из-за наличия матрицы  $[d_c]$  в одном из блоков связи.

Для удобства напомним размеры подматриц, входящих в (7.5):

$$\begin{aligned} [\tilde{A}_r(\lambda)] & - \text{размером } (n_b, n_b); & [\tilde{A}_{ra}(\lambda)] & - \text{размером } (n_b, n_a); \\ [\tilde{A}_{ar}(\lambda)] & - \text{размером } (n_a, n_b); & [\tilde{A}_{a\sigma}(\lambda)] & - \text{размером } (n_a, n_a); \\ [S_{\omega}(\lambda)], [d_c], [E] & - \text{размером } (n_a, n_a); & n_a & = 2, n_r = (n_b + n_a). \end{aligned}$$

Характеристическому уравнению в форме определителя (7.5) соответствует развернутый характеристический полином (ХП) относительно  $\lambda$  степени  $N=2(n_r+2)$ :

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^{N-k} = 0, \quad (7.6)$$

где  $a_k$  – коэффициенты, являющиеся функциями параметров МС.

Получим далее ряд других форм представления ХУ, отличных от (7.5) и (7.6). Эти формы ХУ являются точными, но могут служить хорошей основой для последующей разработки эффективных методов приближенного анализа устойчивости рассматриваемых систем.

Предварительно приведем для справки некоторые свойства определителей, известные из теории матриц [34, 35 и т.д.]. Пусть дана матрица  $[G]$ , разбитая на подматрицы  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  и  $[D]$ :

$$[G] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix}.$$

Тогда определитель матрицы может быть выражен одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} 1) \quad |G| &= |A| \cdot |[D] - [C][A]^{-1}[B]|, \quad \text{а́ñе́е } |A| \neq 0; \\ 2) \quad |G| &= |[A] - [B][D]^{-1}[C]| \cdot |D|, \quad \text{а́ñе́е } |D| \neq 0; \\ 3) \quad |G| &= |[A][D] - [C][B]|, \quad \text{а́ñе́е } [A][C] = [C][A]; \\ 4) \quad |G| &= |[A][D] - [B][C]|, \quad \text{а́ñе́е } [C][D] = [D][C]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Уравнения задачи собственных значений (7.4) могут быть преобразованы к более компактному виду:

$$\begin{bmatrix} [S_a(\lambda)] & mR [S_\omega(\lambda)] \\ \frac{1}{2R} [d_c] [S_\omega(\lambda)] & \lambda(\lambda + h_\varphi) [E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{W_a\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad (7.8)$$

где  $[S_a(\lambda)] = [\tilde{A}_{a\sigma}(\lambda)] - [\tilde{A}_{ar}(\lambda)] [\tilde{A}_r(\lambda)]^{-1} [\tilde{A}_{ra}(\lambda)]$  при условии  $|\tilde{A}_r(\lambda)| \neq 0$ .

Особенностью (7.8) является то, что влияние движения всей внешней части РМ на движение точки крепления АБУ и КМ в АБУ сведено в одну квадратную матрицу  $[S_a(\lambda)]$  размером  $(n_a, n_a)$ . В результате этого размерность системы уравнений сократилась с  $(n_r + 2)$  до  $(n_a + 2)$ , где  $n_a = 2$ , т.е. до 4 уравнений независимо от степени сложности роторной машины. При этом, однако, матрица  $[S_a(\lambda)]$  более сложным образом зависит от  $\lambda$ , за исключением простейших случаев отсутствия внешней части РМ. Её элементы представляют собой дробно-рациональные функции, где в числителе и знаменателе стоят полиномы от  $\lambda$ . Отметим также, что условие  $|\tilde{A}_r(\lambda)| \neq 0$  будем полагать выполненным, поскольку рассматриваются РМ, которые будучи без АБУ являются устойчивыми и невырожденными.

На основе (7.8) получаем следующую форму ХУ:

$$\begin{vmatrix} [S_a(\lambda)] & mR [S_\omega(\lambda)] \\ \frac{1}{2R} [d_c] [S_\omega(\lambda)] & \lambda(\lambda + h_\varphi) [E] \end{vmatrix} = 0. \quad (7.9)$$

В дальнейшем будем исходить именно из этой формы, которую будем называть формой ХУ, приведенной к точке крепления АБУ.

Исходя из (7.9) и используя свойства определителей (7.7), получаем следующий ряд форм характеристического уравнения:

$$\left| \lambda(\lambda + h_\varphi) [S_a(\lambda)] - \frac{1}{2} m [S_\omega(\lambda)] [d_c] [S_\omega(\lambda)] \right| = 0 \quad (7.10)$$

или

$$\left| [S_a(\lambda)] - \frac{1}{2} m \frac{1}{\lambda(\lambda + h_\varphi)} [S_\omega(\lambda)] [d_c] [S_\omega(\lambda)] \right| = 0 \text{ при условии } \lambda(\lambda + h_\varphi) \neq 0 \quad (7.11)$$

или

$$\left| \lambda(\lambda + h_\varphi) [E] - \frac{1}{2} m [d_c] [S_\omega(\lambda)] [S_a(\lambda)]^{-1} [S_\omega(\lambda)] \right| = 0 \text{ при условии } |S_a(\lambda)| \neq 0 \quad (7.12)$$

или

$$\left| \lambda(\lambda + h_\varphi)[E] - \frac{1}{2}m [S_a(\lambda)]^{-1} [S_\omega(\lambda)] [d_c] [S_\omega(\lambda)] \right| = 0 \text{ при условии } |S_a(\lambda)| \neq 0 \quad (7.13)$$

или

$$\left| \lambda(\lambda + h_\varphi)[E] - \frac{1}{2}m [S_\omega(\lambda)] [d_c] [S_\omega(\lambda)] [S_a(\lambda)]^{-1} \right| = 0 \text{ при условии } |S_a(\lambda)| \neq 0. \quad (7.14)$$

Дадим необходимые разъяснения относительно вывода уравнений (7.10)-(7.14). Уравнение (7.10) получено из (7.9) на основе свойства 4 в (7.7) с учетом того, что подматрица КМ пропорциональна единичной матрице и потому коммутативна (перестановочна) с любой матрицей того же размера. Уравнения (7.11) и (7.12) получены из (7.9) на основе свойств 2 и 1 в (7.7). Условия, оговоренные в них, для рассматриваемого класса МС выполняются.

Уравнения (7.13) и (7.14) аналогичны уравнению (7.12) и получены из (7.10) путем вынесения за скобки матрицы  $[S_a(\lambda)]$  влево и вправо.

Отметим, что физический смысл вариантов уравнений (7.11)-(7.14) состоит в том, что они по сути представляют собой ХУ отдельных (сепаратных) подсистем МС, но с учетом влияния всех других подсистем. А именно, выражения (7.12)-(7.14) – это ХУ подсистемы КМ в АБУ с учетом влияния не нее подсистемы РМ. Выражение (7.11) – аналогично, но в отношении подсистемы РМ.

Подчеркнем еще раз, что все полученные варианты ХУ (7.9)-(7.14) являются точными и эквивалентными друг другу и исходному ХУ (7.5) или (7.6) в смысле одинаковости спектра собственных чисел. Различие же этих вариантов по сути связано с различием способов разложения ХП на неполиномиальные множители. Уравнения (7.9)-(7.14) не упрощают задачу для точного анализа, поскольку появляются дробно-рациональные зависимости от  $\lambda$ , однако позволяют работать с матрицами пониженного порядка. В частности в (7.10)-(7.14) определитель имеет минимально возможный порядок (2, 2).

## 8. ОСНОВЫ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ АВТОБАЛАНСИРОВКИ НА ОСНОВЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

### 8.1 Общие соображения

Согласно традиционному подходу общей теории устойчивости движения, при анализе устойчивости сначала получают ХУ в форме определителя (7.5), затем преобразовывают его в форму полинома (7.6) (что является весьма трудоемким этапом) и далее для определения границ устойчивости применяются известные критерии устойчивости (Рауса-Гурвица или Лъенара-Шипара) или метод D-разбиений. В результате этого можно получить формулы для границ устойчивости в зависимости от параметров МС. Границам устойчивости соответствуют граничные (критические) частоты вращения ротора.

Однако непосредственное применение описанной традиционной процедуры к рассматриваемым задачам с целью получения аналитических выражений для границ устойчивости сталкивается с практически непреодолимыми трудностями. Основной причиной этого является очень высокая степень ХП (7.6) для МС РМ с АБУ, что обуславливает чрезвычайную трудоемкость или невозможность преобразований. В частности, даже в самом простом случае базовой модели МС РМ с АБУ полином (7.6) имеет степень  $N=8$  ( $n_b=0$ ,  $n_a=n_r=2$ ). И это при том, что, как показывает опыт исследований, аналитические преобразования возможны и целесообразны лишь, когда степень полинома не превышает  $N=4$ .

В связи с указанным очевидна потребность разработки приближенных методов (способов, подходов) аналитического анализа устойчивости МС рассматриваемого класса. Эти методы должны базироваться на ХУ преимущественно в форме определителя, но допускать возможность практического выполнения процедур аналитических преобразований.

Выполненные к настоящему времени работы по автобалансировке (в том числе и автора), а также полученные выше уравнения и выражения для обобщенной модели МС РМ с АБУ, позволяют сформулировать следующие базовые положения, которые следует учитывать при разработке методов приближенного аналитического исследования устойчивости автобалансировки МС рассматриваемого класса.

1. Механическая система общего вида «РМ – АБУ» состоит из двух связанных между собой подсистем – подсистемы РМ и подсистемы АБУ с КМ. Взаимосвязь

подсистем носит несимметричный характер.

2. При соответствующем выборе обобщенных координат уравнения движения подсистемы КМ в АБУ и подматрица её влияния на подсистему РМ всегда имеют одинаковый вид (инвариантны) независимо от устройства и сложности конкретной РМ. Эта особенность создает возможность разработки единых универсальных процедур аналитического исследования устойчивости рассматриваемого класса МС.

3. Добавление к исходной РМ автобалансира приводит к увеличению числа степеней свободы МС. Это приводит к изменению существовавших и появлению новых собственных (характеристических) чисел и форм собственных колебаний. Это, в свою очередь, обуславливает изменение существовавших и появлению новых критических частот вращения ротора, разграничивающих области устойчивости и неустойчивости автобалансировки. Поэтому даже в базовой (простейшей) модели МС для общего случая значений ее параметров следует ожидать наличие не одной, а нескольких границ устойчивости автобалансировки.

4. При рассмотрении устойчивости по первому приближению существует возможность перехода к суммарным обобщенным координатам КМ, в результате чего возмущенное движение всех  $n$  КМ описывается только двумя ОК. Данное преобразование существенно уменьшает количество анализируемых уравнений и степень характеристического полинома.

5. Потеря устойчивости автобалансировки происходит по одной из форм собственных колебаний МС. Исследования показывают, что чаще всего устойчивость теряется по одной из двух форм колебаний подсистемы КМ. В связи с этим будем полагать, что МС исходной РМ (без АБУ) является заведомо устойчивой. Поэтому при аналитических преобразованиях целесообразно системы уравнений приводить к подсистеме КМ в АБУ, но с учетом влияния на нее подсистемы РМ.

6. Разработка методов аналитического определения границ устойчивости должна первоначально базироваться на характеристическом уравнении, поскольку именно оно является первоисточником информации о границах устойчивости. При этом его преобразования по возможности должны быть точными, а процедуры приближенного анализа должны использоваться лишь на последних стадиях формирования расчетных формул.

7. Изучение существующих работ показывает, что применение процедур приближенного анализа, основанных на таких методах как метод малого параметра,

метод осреднения, метод самосинхронизации и им подобных, в целом не дает желаемой точности аналитических формул. По мнению автора, более эффективно для рассматриваемой МС применение приближенных методов, не основанных на малости каких-либо составляющих в уравнениях, например метод последовательных итераций и др. В целом же, безусловно, возможно применение различных методов приближенного анализа, однако выбор метода требует определенной осторожности.

8. Исследованиями установлено, что, по меньшей мере для базовой модели МС РМ с АБУ во вращающейся системе координат, имеет место характерная особенность спектра собственных чисел (в том числе собственных частот) в режиме автобалансировки. Весь спектр делится на две заметно различные группы: группа малых по модулю собственных чисел, соответствующих медленным колебаниям КМ в АБУ относительно ротора, и группа относительно больших по модулю собственных чисел, соответствующих быстрым движениям собственно ротора. Данная особенность может быть использована для формирования процедур приближенного анализа.

9. Целесообразно ограничить круг рассматриваемых задач поиском лишь практически значимых границ устойчивости автобалансировки, при которых область устойчивости наиболее узкая в пределах эксплуатационного изменения параметров МС. Очевидно, что если будет обеспечена устойчивость для этого крайнего (частного) случая, то будет обеспечена устойчивость и для всего заданного срока эксплуатации РМ с АБУ. А именно, в процессе эксплуатации происходит постепенный рост дисбаланса ротора, вследствие чего изменяются автобалансирующие положения КМ ( $\alpha_j$ ), геометрическая матрица  $[d_c]$  (явным образом входящая в уравнения возмущенного движения и характеристическое уравнение) и геометрический параметр  $D$  (см. ниже). Практический смысл имеет изучение лишь тех частных случаев значений  $D$ , при которых зона устойчивости наиболее узкая. Для базовой модели МС РМ с АБУ, как показывают исследования, это частный случай  $D=0$ , хотя это не исключает интереса и к другому частному случаю  $D=1$ .

10. В общем случае аналитическое исследование устойчивости предполагает наличие трудоемкого этапа перехода к уравнениям возмущенного движения с постоянными коэффициентами, который к тому же заметно усложняет получение формул для границ устойчивости на завершающей стадии анализа. В тоже время это не исключает возможность существования таких частных случаев значений параметров МС, при которых возможен анализ и без такого перехода.

## 8.2 Приближенные методы анализа на основе разложения характеристического уравнения на множители с последующей аппроксимацией

Учитывая приведенные выше положения, будем исходить из ХУ (7.12)-(7.14) в формах, приведенных к подсистеме КМ с учетом влияния подсистемы РМ. Эти три варианта ХУ могут быть представлены в единой форме:

$$\left| \lambda(\lambda + h_\varphi)[E] - \frac{1}{2}m [R(\lambda)] \right| = 0, \quad (8.1)$$

где  $[R(\lambda)] = [d_c][S_\omega(\lambda)][S_a(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)]$

или  $[R(\lambda)] = [S_a(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)][d_c][S_\omega(\lambda)]$

или  $[R(\lambda)] = [S_\omega(\lambda)][d_c][S_\omega(\lambda)][S_a(\lambda)]^{-1}$ .

Выражение, входящее в определитель (8.1) представляет собой сумму полиномиальной матрицы подсистемы КМ и неполиномиальной матрицы влияния подсистемы РМ. Матрица  $[R(\lambda)]$  является сложной матричной функцией размером (2,2), элементы которой представляют собой дробно-рациональные функции от  $\lambda$ . Как видим, здесь имеется три варианта для матричной функции  $[R(\lambda)]$ , которые эквивалентны друг другу в смысле неизменности корней определителя (8.1), но, строго говоря, не равны между собой.

Покажем теперь возможность теоретически точного разложения на множители характеристического уравнения (8.1).

Введем обозначения элементов матрицы  $[R(\lambda)]$ :

$$[R(\lambda)] = \begin{bmatrix} R_{11}(\lambda) & R_{12}(\lambda) \\ R_{21}(\lambda) & R_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Тогда (8.1) принимает вид:

$$\left| \begin{array}{cc} \lambda(\lambda + h_\varphi) - \frac{1}{2}m R_{11}(\lambda) & -\frac{1}{2}m R_{12}(\lambda) \\ -\frac{1}{2}m R_{21}(\lambda) & \lambda(\lambda + h_\varphi) - \frac{1}{2}m R_{22}(\lambda) \end{array} \right| = 0$$

или

$$\lambda^2(\lambda + h_\varphi)^2 - \frac{1}{2}m \operatorname{tr}(R) \lambda(\lambda + h_\varphi) + \frac{1}{4}m^2 |R| = 0, \quad (8.2)$$

где  $|R| = R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21}$ ;  $\operatorname{tr}(R) = R_{11} + R_{22}$  – определитель и след матрицы  $[R(\lambda)]$ .

Отметим, что для всех трех вариантов  $[R(\lambda)]$  в соответствии со свойствами определителя имеет место формула  $|R(\lambda)| = |d_c| \frac{|S_\omega(\lambda)|^2}{|S_a(\lambda)|}$ .

Заметим далее, что выражение (8.2) допускает разложение на два сомножителя:

$$\left( \lambda(\lambda + h_\varphi) + \frac{1}{4}m(-\text{tr}(R) + \sqrt{\Delta_L}) \right) \left( \lambda(\lambda + h_\varphi) + \frac{1}{4}m(-\text{tr}(R) - \sqrt{\Delta_L}) \right) = 0 ,$$

где  $\Delta_L = (\text{tr}(R))^2 - 4|R|$ .

В результате такого разложения задача сводится к анализу фактически одного ХУ:

$$\lambda^2 + \lambda h_\varphi + \frac{1}{4}m q(\lambda, j) = 0 , \quad (8.3)$$

где  $q(\lambda, j) = -\text{tr}(R) + j\sqrt{(\text{tr}(R))^2 - 4|R|}$ ;  $j = \pm 1$ .

Физически значения параметра  $j = \pm 1$  соответствуют двум различным формам собственных колебаний КМ в АБУ.

Далее выражение (8.3) можно рассматривать как квадратичный полином относительно  $\lambda$ , который естественно допускает разложение на два множителя. Отсюда можно непосредственно выразить собственные числа МС, соответствующие подсистеме КМ, как функции от  $q(\lambda, j)$  (или от  $[R(\lambda)]$ ):

$$\lambda = -\frac{1}{2}h_\varphi + \frac{1}{2}l\sqrt{h_\varphi^2 - m q(\lambda, j)} , \quad l = \pm 1 , \quad j = \pm 1 . \quad (8.4)$$

Выражение (8.4) определяет две пары комплексно-сопряженных собственных чисел подсистемы КМ. Следует иметь в виду, что подкоренные выражения в (8.3) и (8.4) в общем случае могут быть как отрицательными, так и положительными.

Показанная только что цепочка преобразований (8.1)-(8.4) является одной из центральных в обосновании разрабатываемого метода. Достоинство этих преобразований заключается в том, что удается последовательно снизить степень основной (чисто полиномиальной) части ХУ – сначала до 4-й степени в (8.2), затем до второй степени в (8.3) и наконец до первой степени в (8.4). При этом имеется возможность раздельного анализа двух форм колебаний КМ и выявления наиболее опасной. Отметим также, что эти преобразования носят теоретически точный характер и справедливы для общего случая МС РМ с АБУ. Однако их непосредственное

применение для аналитического исследования невозможно из-за наличия в них сложных функций  $[R(\lambda)]$  и  $q(\lambda, j)$ , отражающих влияние подсистемы ротора на движение КМ.

Воспользуемся теперь полученными точными формулами (8.2)-(8.4) разложения ХУ на множители для формирования процедур приближенного анализа устойчивости. При этом можно предложить несколько возможных вариантов выполнения такого анализа.

Вариант 1.

Будем исходить из разложения ХУ на множители в форме (8.3), где была введена функция  $q(\lambda, j)$ . Допустим, что мы имеем возможность выполнить приближенную замену точной функции  $q(\lambda, j)$  аналитической функцией в виде полинома второй (или ниже) степени в интересующей нас области параметров МС:

$$q(\lambda, j) \approx \tilde{q}(\lambda, j) = q_0 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_2, \quad (8.5)$$

где  $q_0, q_1, q_2$  – коэффициенты, зависящие от параметров МС и параметра формы колебаний  $j$ .

Тогда вместо (8.3) получаем приближенный характеристический полином второй степени:

$$\left(1 + \frac{1}{4} m q_0\right) \lambda^2 + \left(h_\varphi + \frac{1}{4} m q_1\right) \lambda + \frac{1}{4} m q_2 = 0. \quad (8.6)$$

Согласно критериям Рауса-Гурвица для устойчивости необходимо и достаточно одновременного выполнения условий:

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{4} m q_0 > 0; \\ h_\varphi + \frac{1}{4} m q_1 > 0; \\ \frac{1}{4} m q_2 > 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

Следовательно, граничные (критические) скорости вращения ротора  $\Omega_\Gamma$  соответствуют выполнению хотя бы одного из равенств:

$$1 + \frac{1}{4} m q_0(\Omega_\Gamma) = 0 \quad \text{или} \quad h_\varphi + \frac{1}{4} m q_1(\Omega_\Gamma) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} m q_2(\Omega_\Gamma) = 0. \quad (8.8)$$

В итоге границы устойчивости автобалансировки  $\Omega_\Gamma$  (граничные скорости вращения ротора) и их количество могут быть определены на основе (8.8) и условий

устойчивости (8.7).

Вариант 2.

Рассуждая аналогично варианту 1, формируем другой способ приближенного анализа, исходя из разложения ХУ на множители в форме (8.2), где используется матричная функция  $[R(\lambda)]$  размером (2,2). Выражение (8.2) можно рассматривать как полином 4-й степени относительно  $\lambda$  с коэффициентами, зависящими от  $\lambda$ , а конкретнее от определителя и следа матрицы  $[R(\lambda)]$ . Будем полагать, что имеется возможность выполнить приближенную замену точных функций  $|R(\lambda)|$  и  $\text{tr}(R(\lambda))$  аналитическими функциями в виде полиномов соответствующих степеней:

$$\begin{aligned} |R(\lambda)| &\approx |d_c| (c_0\lambda^4 + c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4); \\ \text{tr}(R(\lambda)) &\approx b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где  $c_i, b_j$  – коэффициенты, зависящие от параметров МС.

Формулы для коэффициентов могут быть также получены другим путем на основе выполнения приближенной замены исходной функции  $[R(\lambda)]$  матричным полиномом второй (или ниже) степени с последующим переходом к  $|R(\lambda)|$  и  $\text{tr}(R(\lambda))$ :

$$[R(\lambda)] \approx [d_c]([\alpha]\lambda^2 + [\beta]\lambda + [\gamma]), \quad (8.10)$$

где  $[\alpha], [\beta], [\gamma]$  – матрицы коэффициентов, зависящих от параметров МС.

Здесь фактически выполняется приближенная замена полиномами каждого из элементов матрицы  $[R(\lambda)]$ . Причем во многих случаях МС отдельные элементы оказываются равными друг другу, что облегчает исследование.

Выполнив замену (8.9) или (8.10), получаем вместо (8.2) приближенный характеристический полином 4-й степени:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (8.11)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 - \frac{1}{2}mb_0 + \frac{1}{4}m^2|d_c|c_0; & a_1 &= 2h_\varphi - \frac{1}{2}m(h_\varphi b_0 + b_1) + \frac{1}{4}m^2|d_c|c_1; \\ a_2 &= h_\varphi^2 - \frac{1}{2}m(h_\varphi b_1 + b_2) + \frac{1}{4}m^2|d_c|c_2; & a_3 &= -\frac{1}{2}mh_\varphi b_2 + \frac{1}{4}m^2|d_c|c_3; & a_4 &= \frac{1}{4}m^2|d_c|c_4. \end{aligned}$$

Согласно критериям Рауса-Гурвица для полинома 4-й степени условия устойчивости имеют вид [28-30 и др.]:

$$\begin{cases} a_0 > 0; & a_1 > 0; & a_2 > 0; & a_3 > 0; & a_4 > 0; \\ a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Следовательно, граничные (критические) скорости вращения ротора  $\Omega_\Gamma$  соответствуют выполнению хотя бы одного из равенств:

$$\begin{aligned} a_0(\Omega_\Gamma) = 0; & \quad a_1(\Omega_\Gamma) = 0; & \quad a_2(\Omega_\Gamma) = 0; & \quad a_3(\Omega_\Gamma) = 0; & \quad a_4(\Omega_\Gamma) = 0; \\ a_1(\Omega_\Gamma) a_2(\Omega_\Gamma) a_3(\Omega_\Gamma) - a_0(\Omega_\Gamma) a_3^2(\Omega_\Gamma) - a_1^2(\Omega_\Gamma) a_4(\Omega_\Gamma) = 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

В итоге границы устойчивости автобалансировки  $\Omega_\Gamma$  (граничные скорости вращения ротора) и их количество могут быть определены на основе (8.13) и условий устойчивости (8.12).

Вариант 3.

Заметим, что выражение (8.4) позволяет сразу выписать итерационную формулу уточнения корня  $\lambda$  по методу последовательных приближений. Тогда собственное число, соответствующее КМ, может быть получено с помощью следующей итерационной процедуры:

$$\lambda^{(k+1)} = -\frac{1}{2} h_\varphi + \frac{1}{2} l \sqrt{h_\varphi^2 - m q(\lambda^{(k)}, j)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad l = \pm 1, \quad j = \pm 1 \quad (8.14)$$

или в более развернутом виде

$$\lambda^{(k+1)} = -\frac{1}{2} h_\varphi + \frac{1}{2} l \sqrt{h_\varphi^2 - m \left( -\operatorname{tr}(R(\lambda^{(k)})) + j \sqrt{(\operatorname{tr}(R(\lambda^{(k)})))^2 - 4 |R(\lambda^{(k)})|} \right)},$$

где  $l = \pm 1$ ;  $j = \pm 1$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$  – номер итерации.

Условия устойчивости имеют известный вид:

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0, \quad (8.15)$$

а граничные (критические) скорости вращения  $\Omega_\Gamma$  соответствуют равенству

$$\operatorname{Re}(\lambda(\Omega_\Gamma)) = 0. \quad (8.16)$$

В итоге границы устойчивости автобалансировки  $\Omega_\Gamma$  и их количество могут быть определены на основе (8.16) и условий устойчивости (8.15).

Таким образом, нами сформировано три варианта вывода аналитических формул для границ устойчивости автобалансировки. Дадим их краткую сравнительную характеристику.

Два первых варианта приближенного анализа являются родственными. Оба они основаны на приближенной замене (аппроксимации) сложных функций от  $\lambda$  полиномиальными зависимостями с последующим сведением точного ХУ к полиному

второй или 4-й степени (независимо от состава РМ). Минимальность степени получающихся полиномов допускает реальное применение известных общих критериев устойчивости с целью получения аналитических выражений для границ устойчивости  $\Omega_{\Gamma}$ .

Наиболее перспективным (с точки зрения возможности реализации и ожидаемой точности результата), на взгляд автора, следует считать вариант 1 (формулы (8.5)-(8.8)). Его достоинства по сравнению с вариантами 2 и 3: минимально возможная степень полинома (вторая), т.е. требуется получить формулы только для трех коэффициентов  $q_0, q_1, q_2$ ; приближенная замена выполняется на заключительной стадии формирования ХУ, что минимизирует погрешность; простота итоговых условий устойчивости; возможность анализа устойчивости по отдельным формам колебаний КМ. Основным недостатком – сложность точной функции  $q(\lambda, j)$ , подлежащей приближенной замене, которая содержит дробно-рациональные зависимости от полиномов высоких степеней и радикал. Применение варианта 2 (формулы (8.9)-(8.13)) также возможно. При этом работа ведется с более простыми функциями, но в большем количестве. Следует также иметь в виду, что итоговые условия устойчивости более сложные и содержат произведения коэффициентов, что повышает степень сложности вывода формул для  $\Omega_{\text{К}}$  на последней стадии анализа.

Вариант 3 (формулы (8.14)-(8.16)) принципиально отличается от двух предыдущих тем, что не требует процедуры приближенной замены функций. Его основное достоинство заключается в том, что он допускает непосредственное применение без каких-либо предварительных преобразований. Однако вариант 3 имеет ряд недостатков. Во-первых, громоздкость аналитических преобразований при этом настолько велика, что реальное применение варианта 3 фактически ограничено только одной итерацией. В этой связи решающее значение приобретает точность нулевого приближения  $\lambda^{(0)}$ . Во-вторых, получаемая формула для характеристического числа  $\lambda$  содержит вложенные радикалы, что заметно усложняет аналитическое выделение вещественной части  $\text{Re}(\lambda)$ , а это необходимо для дальнейшего определения границ устойчивости. Кроме того, как показывает опыт исследований базовой модели МС РМ с АБУ [12], вещественная часть  $\text{Re}(\lambda)$  с трудом поддается аналитической оценке с точностью, достаточной для получения формул для границ устойчивости.

Несмотря на указанные недостатки вариант 3 безусловно полезен и по меньшей

мере может применяться для предварительной оценки собственных чисел (в том числе собственных частот) подсистемы КМ. В качестве нулевого приближения  $\lambda^{(0)}$  можно рекомендовать принять собственные числа сепаратной подсистемы КМ, т.е.  $\lambda^{(0)} = 0$  и  $\lambda^{(0)} = -h_\phi$  (см. (7.9) или др.). Однако, как видно из структуры выражения (8.4) и из результатов существующих работ [19, 12, 22, 21], видимо будет точнее принять  $\lambda^{(0)} = -0,5 h_\phi$ .

Одним из ключевых этапов сформулированных выше процедур является замена точных функций от  $\lambda$  приближенными аналитическими зависимостями полиномиального вида (см. (8.5), (8.9), (8.10)). Для этого можно использовать хорошо разработанный аппарат теории приближения функций [36]. К основным методам, эффективно работающим при аналитическом приближении функций (аппроксимации), можно отнести следующие:

- аппроксимация методом наименьших квадратов, методом Галеркина и им подобными;
- интерполяция полиномом по заданным точкам функции;
- разложение в ряд Тейлора по степеням  $\lambda$  в окрестности характерного значения  $\lambda = \lambda_a$ ; в качестве последнего можно принять корни подсистемы КМ  $\lambda_a = 0$  или  $-h_\phi$ , либо  $\lambda_a = -0,5h_\phi$  (первое проще, последнее точнее).

Приближение функций должно производиться в диапазоне  $\lambda$ , соответствующем истинным значениям собственных чисел подсистемы КМ по вещественной и мнимой частям. Из характеристического уравнения для общего случая (7.5) следует, что диапазон приближения по вещественной и мнимой частям  $\lambda$ :  $\text{Re}(\lambda) = -h_\phi \dots 0$  и  $\text{Im}(\lambda) \approx 0$ , причем независимо от структуры РМ. При этом приближение функций будет эффективным лишь при условии, что собственные числа сепаратных подсистем РМ и КМ не будут слишком близки друг другу, поскольку в знаменателях точных функций стоят определители подсистемы ротора. Данное условие для рассматриваемого класса МС выполняется.

Таким образом, в данном разделе получены основные единые процедуры аналитического метода приближенного исследования устойчивости автобалансировки МС РМ с АБУ.

### 8.3. Некоторые заметки относительно других методов приближенного анализа устойчивости

Одной из особенностей механической системы РМ с АБУ является то, что некоторые ее параметры могут трактоваться как малые параметры. В целом, опираясь на анализ возможных диапазонов значений безразмерных параметров реальных МС в [12, 19, 22], следует признать обоснованным введение в качестве малого параметра величины  $m$ . Также малым является параметр  $1/R$ , который, однако, сокращается при разворачивании ХУ. Попутно отметим, что произведение  $mR$  нельзя считать малым. Наличие малого параметра в принципе может быть использовано для приближенного анализа. В частности, в контексте полученных выше результатов, возможно разложение в степенной ряд по  $m$  ХУ: в исходной форме (7.5), (7.6) или (7.9), либо в приведенной к подсистеме КМ форме (7.12)-(7.14). либо после разложения ХУ на множители в форме (8.2)-(8.4).

Отметим, однако, что, как указано в работе [22], применение к данной МС процедур, основанных на идее малого параметра, требует определенной осторожности. Во-первых, как показывает опыт исследований, для достижения приемлемой точности недостаточно учета одного или двух членов ряда, что существенно затрудняет аналитические преобразования, либо делает их невозможными. Во-вторых, при малом изменении  $m$  возможна резкая структурная перестройка МС. В-третьих, при использовании вращающихся координат интересующие нас собственные числа подсистемы КМ близки к нулю (по модулю), что вообще ставит под сомнение правомерность применения идеи малого параметра. Указанные обстоятельства, по всей видимости, являются причиной относительно низкой точности результатов ряда работ, где в явной или неявной форме использовался данный подход.

Тем не менее, в целом применение к данной задаче метода малого параметра и ему подобных в обоснованных случаях возможно и может быть эффективным.

Другой особенностью МС РМ с АБУ, которая может быть использована для построения эффективных процедур аналитического исследования, является специфика спектра собственных значений [15, 18, 19, 22]. В режиме автобалансировки частоты собственных колебаний КМ относительно ротора близки к нулю и заметно меньше частот собственных колебаний ротора (во вращающейся системе координат), т.е.  $\text{Im}(\lambda_{\text{KM}}) \ll \text{Re}(\lambda_{\text{PM}})$ . Кроме того, на границах устойчивости действительная часть одной или двух пар  $\lambda_{\text{KM}}$  равна нулю  $\text{Re}(\lambda_{\text{KM}})=0$ . Поэтому можно считать, что спектр

собственных значений МС делится на две группы: группу из 4-х малых по модулю и группу больших  $\lambda_{PM}$ , причем  $|\lambda_{KM}| \ll |\lambda_{PM}|$ . Данное свойство позволяет воспользоваться основной идеей метода Лобачевской для определения корней полинома [37 и др.]. В соответствии с ним после получения точного характеристического полинома (7.6) дальнейший анализ проводится приближенно на основе для его усеченной части, соответствующей группе малых корней, т.е.

$$\sum_{k=N-4}^N a_k \lambda^{N-k} = a_{N-4} \lambda^4 + a_{N-3} \lambda^3 + a_{N-2} \lambda^2 + a_{N-1} \lambda + a_N = 0 . \quad (8.16)$$

При этом существенно, что независимо от устройства РМ количество  $\lambda_{KM}$  неизменно и равно четырем. Невысокая степень полинома позволяет для аналитических процедур применять известные критерии устойчивости или метод D-разбиений.

Данный подход применялся в работе [22], где получены аналитические формулы для  $\Omega_G$ , обладающие приемлемой точностью. Однако, как установлено в этой же работе, для обеспечения приемлемой точности следует оставлять дополнительно на 1-2 слагаемых больше, чем в (8.16), и анализировать далее полином 5-6 степени.

Отметим также, что само по себе свойство близости к нулю  $|\lambda_{KM}|$  может быть полезно для упрощения выражений функций с дробями и радикалами в  $[R(\lambda)]$  и  $q(\lambda, j)$ .

## 9. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОБАЛАНСИРОВКИ В ЧАСТНЫХ (ОСОБЫХ) СЛУЧАЯХ

В данном разделе рассматриваются некоторые особенности частных случаев, связанных с особыми значениями геометрических параметров автобалансирующего расположения КМ в АБУ. В полученных выше уравнениях возмущенного движения и в ХУ геометрия расположения КМ учитывается матрицей и её параметрами (см. (5.7)):

$$[d_c] = \begin{bmatrix} (n - D_c) & -D_s \\ -D_s & (n + D_c) \end{bmatrix} ; \quad |d_c| = n^2 - D_c^2 - D_s^2 = n^2(1 - D) , \quad (9.1)$$

где

$$D = \frac{1}{n^2} (D_c^2 + D_s^2) ; \quad 0 \leq D \leq 1 ; \quad D_c = \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j ; \quad D_s = \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j ; \quad 0 \leq D_c^2, D_s^2 \leq n^2 .$$

Здесь  $D$  – это обобщенный геометрический параметр расположения КМ в АБУ при автобалансирующем режиме движения. Диапазон его возможного изменения  $D=0\dots 1$ . Отметим также, что, по меньшей мере для базовой модели МС РМ с АБУ, после разворачивания ХУ в нем остается лишь параметр  $D$ .

Практическая целесообразность ограничения исследования анализом частных случаев значений геометрических параметров  $[d_c]$  и  $D$  обусловлена следующим. В процессе эксплуатации РМ происходит неизбежный рост неуравновешенности ротора, вследствие чего изменяются  $\alpha_j$ ,  $[d_c]$  и  $D$ . Как следствие изменяются и границы устойчивости. Характер изменения границы устойчивости в зависимости от  $D$  для базовой модели МС РМ с АБУ изучен в работах [12, 19, 21]. Одновременно с ростом дисбаланса снижается емкость АБУ. В течении всего заданного срока эксплуатации автобалансиру должен эффективно работать, значит его минимально допустимая емкость достигается в конце этого срока и равна  $E=1$ . При этой емкости все КМ располагаются вместе в точке, диаметрально противоположной дисбалансу и параметр принимает значение  $D=1$ . В процессе эксплуатации вполне возможно и значение  $D=0$ . Например, для базовой (простейшей) модели МС при  $n=2$  нулевое значение  $D$  имеет место при  $\alpha_{1,2} = \pm 135^\circ$  и  $E = \sqrt{2}$ .

Важно при этом, что как показывают исследования базовой модели МС [12, 19, 21], при приближении  $D$  к нулю происходит существенное сужение области устойчивости автобалансирующей и может произойти её потеря. Аналогичная тенденция может иметь место и при приближении  $D$  к 1, но в меньшей степени. Поясним, что случаю  $D=0$ , по видимому, соответствует случай кратный собственных значений КМ или по меньшей мере случай кратной их мнимой части, т.е. имеет место внутренний резонанс МС, когда КМ «раскачивают» друг друга. Случаю же  $D=1$  соответствует наличие нулевого корня ХУ.

Таким образом, устойчивость автобалансирующей будет обеспечена в течение эксплуатации, если она обеспечена для частных случаев  $D=0$  и  $D=1$ . Поэтому целесообразно исследовать прежде всего именно эти частные случаи.

Для удобства повторим некоторые выражения, необходимые для дальнейшего (см. формулы (8.1)-(8.3)):

$$\begin{aligned}
[R(\lambda)] &= [d_c][S_\omega(\lambda)][S_a(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)] \\
\text{или} \quad [R(\lambda)] &= [S_a(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)][d_c][S_\omega(\lambda)] \\
\text{или} \quad [R(\lambda)] &= [S_\omega(\lambda)][d_c][S_\omega(\lambda)][S_a(\lambda)]^{-1}; \tag{9.2}
\end{aligned}$$

$$|R(\lambda)| = |d_c| \frac{|S_\omega(\lambda)|^2}{|S_a(\lambda)|};$$

$$q(\lambda, j) = -\text{tr}(R) + j\sqrt{(\text{tr}(R))^2 - 4|R|}; \quad j = \pm 1.$$

Частный случай  $D=0$ .

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned}
[d_c] &= n[E]; \quad |d_c| = n^2; \\
D_c^2 + D_s^2 &= 0; \quad D_c = D_s = 0. \tag{9.3}
\end{aligned}$$

Как видим, матрица  $[d_c]$  стала пропорциональной единичной матрице. При этом несколько упрощается вид формул:

$$\begin{aligned}
[R(\lambda)] &= n [S_\omega(\lambda)][S_a(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)] = n [S_a(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)]^2 = n [S_\omega(\lambda)]^2 [S_a(\lambda)]^{-1}; \\
|R(\lambda)| &= n^2 \frac{|S_\omega(\lambda)|^2}{|S_a(\lambda)|}; \quad \text{tr}(R(\lambda)) = n \text{tr}([S_\omega(\lambda)]^2 [S_a(\lambda)]^{-1}). \tag{9.4}
\end{aligned}$$

Формула для  $q(\lambda, j)$  формально остается прежней, хотя безусловно при рассмотрении конкретной задачи упрощается ее вид и снижается трудоемкость ее приближенной замены.

Частный случай  $D=1$ .

В этом случае имеем:

$$|d_c| = 0; \quad D_c^2 + D_s^2 = n^2. \tag{9.5}$$

Равенство нулю определителя  $|d_c|$  приводит к существенному упрощению формул:

$$\begin{aligned}
|R(\lambda)| &= 0; \\
q(\lambda, j) &= (-1 + j) \text{tr}(R(\lambda)) = \begin{cases} 0; \\ -2\text{tr}(R(\lambda)) \end{cases}, \quad j = \pm 1. \tag{9.6}
\end{aligned}$$

Отсюда на основе (8.4) (или (8.3), (8.2)) можно показать, что в этом частном случае спектр собственных чисел подсистемы КМ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0; \\
\lambda_2 &= -h_\varphi; \\
\lambda_{3,4} &= -\frac{1}{2}h_\varphi \pm \frac{1}{2}\sqrt{h_\varphi^2 + 2m \operatorname{tr}(R(\lambda))}.
\end{aligned}
\tag{9.7}$$

Здесь корни  $\lambda_{1,2}$  определены однозначно, а корни  $\lambda_{3,4}$  зависят от устройства РМ и требуют уточнения. Как видно из (9.7), в случае  $D=1$  система имеет нулевой корень независимо от значений параметров МС. Поэтому для строгого решения вопроса устойчивости необходимо, во-первых, установить достаточные условия устойчивости на основе последнего уравнения в (9.7) и, во-вторых, для нулевого корня рассмотреть второе приближение уравнений возмущенного движения, либо попытаться воспользоваться специальными теоремами теории устойчивости. Отметим, однако, что исследования базовой модели МС обнаруживают лишь слабую тенденцию сужения области устойчивости при  $D=1$  (по сравнению со случаем  $D=0$ ) [12, 19, 21].

Частный случай  $D=1$  по меньшей мере имеет место в конце срока эксплуатации РМ с АБУ, когда емкость автобалансира снизилась до  $E=1$  и все КМ расположились в одной точке, диаметрально противоположной дисбалансу. В этом случае при  $D=1$  и  $E=1$  матрица  $[d_c]$  и ее элементы принимают конкретные значения:

$$\begin{aligned}
[d_c] &= 2n \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
\alpha_j &= \pm\pi, \quad j=1\dots n; \quad D_c = n; \quad D_s = 0.
\end{aligned}
\tag{9.8}$$

Следует иметь в виду, что в многомассовых АБУ ( $n \geq 3$ ) значение  $D=1$  может иметь место и при емкости  $E > 1$  [21].

## 10. ВОЗМОЖНОСТИ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Переход к уравнениям возмущенного движения с постоянными коэффициентами является вынужденной процедурой. Её основные недостатки в порядке значимости при аналитической направленности исследования:

- усложнение аналитического вида выражений для коэффициентов уравнений, что существенно затрудняет последний этап получения формул для границ устойчивости;
- повышение общей трудоемкости аналитического исследования;
- отсутствие универсальной технологии преобразования; для многих моделей РМ с АБУ способ преобразования далеко неочевиден.

В связи с этим важно рассмотреть возможности исследования устойчивости автобалансировки без этапа перехода к уравнениям с постоянными коэффициентами с учетом имеющейся специфики данной задачи.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения в первом приближении в его исходной форме (5.8). Анализ структуры этих уравнений показывает, что периодические коэффициенты входят в них в форме матриц  $[T]$  и  $[T]^{-1}$ . Причем эти матрицы входят только во внедиагональные подматрицы связей между подсистемами МС. Эта специфика уравнений (5.8) позволяет предположить возможность исключения периодических коэффициентов из ХУ без предварительного преобразования к уравнениям с постоянными коэффициентами. Рассмотрим данную возможность.

Выясним условия, при которых уравнения возмущенного движения (5.8) с периодическими коэффициентами удовлетворяют решения с постоянными амплитудами вида:

$$\begin{Bmatrix} \{ \delta q_r \} \\ \{ \delta q_a \} \\ \{ \Psi \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ Q_r \} \\ \{ Q_a \} \\ \{ \Psi \} \end{Bmatrix} e^{\lambda t}, \quad (10.1)$$

где  $\{ Q_r \}$ ,  $\{ Q_a \}$ ,  $\{ \Psi \}$  – постоянные векторы амплитуд.

Подставляя (10.1) в (5.8), получаем систему алгебраических уравнений задачи собственных значений:

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{bmatrix} [M_r] & [M_{ra}] & [0] \\ [M_{ar}] & [M_{a\sigma}] & mR[T] \\ [0] & \frac{1}{2R}[d_c][T]^{-1} & [E] \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} [H_r] & [H_{ra}] & [0] \\ [H_{ar}] & [H_a] & 2mR\omega[T][E_c] \\ [0] & [0] & h_\phi[E] \end{bmatrix} \lambda + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} [K_r] & [K_{ra}] & [0] \\ [K_{ar}] & [K_a] & -mR\omega^2[T] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{Q_r\} \\ \{Q_a\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix} = \{0\}
\end{aligned} \tag{10.2}$$

или в форме матриц многочленов от  $\lambda$  ( $\lambda$ -матриц):

$$\begin{bmatrix} [A_r(\lambda)] & [A_{ra}(\lambda)] & [0] \\ [A_{ar}(\lambda)] & [A_{a\sigma}(\lambda)] & mR\omega[T][S_\omega(\lambda)] \\ [0] & \lambda^2 \frac{1}{2R}[d_c][T]^{-1} & \lambda(\lambda + h_\phi)[E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q_r\} \\ \{Q_a\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix} = \{0\}, \tag{10.3}$$

где

$$\begin{aligned}
[A_r(\lambda)] &= [M_r]\lambda^2 + [H_r]\lambda + [K_r]; & [A_{ra}(\lambda)] &= [M_{ra}]\lambda^2 + [H_{ra}]\lambda + [K_{ra}]; \\
[A_{ar}(\lambda)] &= [M_{ar}]\lambda^2 + [H_{ar}]\lambda + [K_{ar}]; & [A_{a\sigma}(\lambda)] &= [M_{a\sigma}]\lambda^2 + [H_a]\lambda + [K_a]; \\
[S_\omega(\lambda)] &= (\lambda^2 - \omega^2)[E] + 2\omega\lambda[E_c]; & [E_c] &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; & [T(t)] &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} [A_r(\lambda)] & [A_{ra}(\lambda)] & [0] \\ [A_{ar}(\lambda)] & [A_{a\sigma}(\lambda)] & mR\omega[T][S_\omega(\lambda)] \\ [0] & \lambda^2 \frac{1}{2R}[d_c][T]^{-1} & \lambda(\lambda + h_\phi)[E] \end{vmatrix} = 0. \tag{10.4}$$

Напомним, что используемые здесь матрицы вида  $[A_{\dots}(\lambda)]$  являются исходными и отличаются от аналогичных матриц  $[\tilde{A}_{\dots}(\lambda)]$  тем, что имеют более простую структуру и содержат минимальное количество параметра  $\omega$ , что важно для упрощения аналитических преобразований.

Уравнения задачи собственных значений (10.2), (10.3) могут быть записаны также в более компактной форме:

$$\begin{bmatrix} [S_0(\lambda)] & mR\omega[T][S_\omega(\lambda)] \\ \lambda^2 \frac{1}{2R}[d_c][T]^{-1} & \lambda(\lambda + h_\phi)[E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q_a\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix} = \{0\}, \tag{10.5}$$

где  $[S_0(\lambda)] = [A_{a\sigma}(\lambda)] - [A_{ar}(\lambda)][A_r(\lambda)]^{-1}[A_{ra}(\lambda)]$  при условии  $|A_r(\lambda)| \neq 0$ .

Здесь матрица  $[S_0(\lambda)]$  отражает влияние всей внешней части подсистемы РМ на движение точки крепления АБУ к ротору. Она аналогична матрице  $[S_a(\lambda)]$  и в общем случае неполиномиальным образом зависит от  $\lambda$  (за исключением простых случаев РМ).

Из (10.5) получаем вид характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} [S_0(\lambda)] & mR\omega [T][S_\omega(\lambda)] \\ \lambda^2 \frac{1}{2R} [d_c][T]^{-1} & \lambda(\lambda + h_\varphi)[E] \end{vmatrix} = 0. \quad (10.6)$$

Далее ХУ (10.6) может быть представлено в других эквивалентных формах, подобно тому, как это делалось в разделе 7. В результате получаем следующие варианты записи ХУ в формах, приведенных к подсистемам МС:

$$\left| \lambda(\lambda + h_\varphi)[S_0(\lambda)] - \frac{1}{2} m\lambda^2 [T][S_\omega(\lambda)][d_c][T]^{-1} \right| = 0 \quad (10.7)$$

$$\text{или} \left| [S_0(\lambda)] - \frac{1}{2} m \frac{\lambda^2}{\lambda(\lambda + h_\varphi)} [T][S_\omega(\lambda)][d_c][T]^{-1} \right| = 0 \text{ при условии } \lambda(\lambda + h_\varphi) \neq 0 \quad (10.8)$$

$$\text{или} \left| \lambda(\lambda + h_\varphi)[E] - \frac{1}{2} m\lambda^2 [d_c][T]^{-1}[S_0(\lambda)]^{-1}[T][S_\omega(\lambda)] \right| = 0 \text{ при условии } |S_0(\lambda)| \neq 0 \quad (10.9)$$

$$\text{или} \left| \lambda(\lambda + h_\varphi)[E] - \frac{1}{2} m\lambda^2 [S_0(\lambda)]^{-1}[T][S_\omega(\lambda)][d_c][T]^{-1} \right| = 0 \text{ при условии } |S_0(\lambda)| \neq 0 \quad (10.10)$$

$$\text{или} \left| \lambda(\lambda + h_\varphi)[E] - \frac{1}{2} m\lambda^2 [T][S_\omega(\lambda)][d_c][T]^{-1}[S_0(\lambda)]^{-1} \right| = 0 \text{ при условии } |S_0(\lambda)| \neq 0. \quad (10.11)$$

Запишем уравнения (10.9)-(10.11) в единой форме ХУ, приведенного к подсистеме КМ с учетом влияния подсистемы РМ:

$$\left| \lambda(\lambda + h_\varphi)[E] - \frac{1}{2} m\lambda^2 [L(\lambda)] \right| = 0, \quad (10.12)$$

$$\text{где} \quad [L(\lambda)] = [d_c][T]^{-1}[S_0(\lambda)]^{-1}[T][S_\omega(\lambda)]$$

$$\text{или} \quad [L(\lambda)] = [S_0(\lambda)]^{-1}[S_\omega(\lambda)][T][d_c][T]^{-1}$$

$$\text{или} \quad [L(\lambda)] = [S_\omega(\lambda)][T][d_c][T]^{-1}[S_0(\lambda)]^{-1}.$$

Здесь было также использовано свойство коммутативности матриц  $[T]$  и  $[S_\omega(\lambda)]$ , т.е.  $[T][S_\omega(\lambda)] = [S_\omega(\lambda)][T]$ , в чем можно убедиться прямой подстановкой.

Отметим, что уравнения (10.7)-(10.12) аналогичны уравнениям (7.10)-(7.14) и

(8.1), а матричная функция  $[L(\lambda)]$  аналогична  $[R(\lambda)]$ , введенной в разделе 8.

Как видим периодические коэффициенты входят в ХУ (10.12), а точнее в матрицу  $[L(\lambda)]$ , в виде матричных комплексов  $[T][d_c][T]^{-1}$  или  $[T]^{-1}[S_0(\lambda)]^{-1}[T]$ . Следовательно, ХУ будет иметь постоянные коэффициенты при условии, что

$$[T][d_c][T]^{-1} = \text{const} . \quad (10.13)$$

или

$$[T]^{-1}[S_0(\lambda)]^{-1}[T] = \text{const} \quad (10.14)$$

Здесь первое условие связано с частными случаями расположения КМ в АБУ в режиме автобалансировки, а второе условие – с особенностями структуры и параметров подсистемы роторной машины. Рассмотрим эти условия.

1. Первое условие (10.13) выполняется для таких частных случаев расположения КМ в АБУ, при которых геометрическая матрица  $[d_c]$  коммутативна (перестановочна) с  $[T]$ , т.е.

$$[T][d_c] = [d_c][T] , \quad (10.15)$$

или условие в более общем виде:

$$[T][d_c] = [d_c^*][T] ,$$

где  $[d_c^*]$  – некоторая постоянная матрица.

Условие (10.15) выполняется при частном случае  $D=0$ , когда  $[d_c] = n[E]$ ;  $|d_c| = n^2$  (см. (9.3)). Практическая значимость этого частного случая показана в разделе 9. В этом случае матричное произведение  $[T][d_c][T]^{-1} = n[E]$  постоянно и не зависит от времени.

Отметим важное обстоятельство. К этой же возможности исследования можно придти и другим путем, а именно на основе использования альтернативного варианта суммарных обобщенных координат КМ  $\{f_a\}$  (вместо  $\{\psi\}$ ), показанного в разделе 5 (см. формулы (5.10)-(5.12)). При таком подходе в случае  $D=0$  непосредственно уравнения возмущенного движения МС (5.12) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами.

Таким образом, установлено, что любая МС РМ с АБУ (из рассматриваемого класса МС) может быть аналитически исследована для такого практически важного частного случая, как  $D=0$ , без дополнительного перехода к уравнениям с постоянными

коэффициентами, что безусловно проще и эффективнее. При этом результат исследования будет достаточен для практического обеспечения устойчивости АБУ.

2. Второе условие (10.14) выполняется для тех РМ, у которых матрица  $[S_0(\lambda)]$  коммутативна (перестановочна) с  $[T]$ , т.е.

$$[T][S_0(\lambda)] = [S_0(\lambda)][T], \quad (10.16)$$

или условие в более общем виде:

$$[T][S_0(\lambda)] = [S_0^*(\lambda)][T],$$

где  $[S_0^*(\lambda)]$  – некоторая постоянная матрица.

Это условие, в частности выполняется для РМ с осесимметричными свойствами, в том числе для базовой (простейшей) модели МС РМ с АБУ. Таким образом, установлено, что существует подкласс рассматриваемых МС, исследование которых возможно без дополнительного перехода к уравнениям с постоянными коэффициентами.

В итоге данного раздела установлено, что при выполнении одного из условий (10.13) или (10.14) уравнения возмущенного движения (5.8) с периодическими коэффициентами допускают решения с постоянными амплитудами вида (10.1), коэффициенты ХУ при этом не зависят от времени и переход к уравнениям с постоянными коэффициентами не требуется. Дальнейшее аналитическое исследование может проводиться приближенными методами, аналогичными предложенным в разделе 8.

Укажем также, что полученные здесь результаты безусловно не исключают возможности применения известных к настоящему времени в общей теории устойчивости методов анализа неавтономных систем с периодическими коэффициентами. Однако в целом их применение сопряжено с серьезными трудностями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами работы являются следующие положения.

1. Структура полученных в общем виде нелинейных уравнений движения механической системы «РМ-АБУ» (3.10) (или (3.11)) наглядно отражает наличие двух связанных между собой подсистем – подсистемы РМ и подсистемы АБУ с КМ. Взаимосвязь между подсистемами носит несимметричный характер. При этом важно, что уравнения движения подсистемы КМ в АБУ и подматрицу её влияния на подсистему РМ удастся выразить явным образом через конкретные обобщенные координаты, которые всегда имеют одинаковый (инвариантный) вид независимо от устройства и сложности РМ. Эта особенность уравнений движения является следствием принятой в работе системы классификации ОК МС и создает важную основу для разработки единого общего подхода к изучению динамики и устойчивости АБУ, установленного на произвольную роторную машину.

2. Обобщенная математическая модель МС допускает решения, соответствующие абсолютно синхронному движению КМ вместе с ротором, в том числе режиму синхронной автобалансировки по меньшей мере точки крепления АБУ к ротору. Полученные формулы позволяют в общем случае проверить принципиальную возможность такой автобалансировки с помощью одного АБУ и определить геометрические параметры автобалансирующего расположения КМ.

3. Показано, что система уравнений возмущенного движения (в первом приближении) структурно аналогична уравнениям невозмущенного движения и в общем случае содержит периодические коэффициенты, изменяющиеся с частотой  $\omega$ . Эти коэффициенты входят во внедиагональные подматрицы связей между подсистемой РМ и подсистемой АБУ, причем в форме матриц  $[T]$  перехода к вращающейся системе координат.

4. Установлено, что при исследовании устойчивости по первому приближению существует возможность существенного уменьшения количества анализируемых уравнений и степени характеристического полинома путем перехода к суммарным обобщенным координатам КМ, в результате чего возмущенное движение всех  $n$  КМ описывается только двумя ОК, причем независимо от особенностей РМ. Предложено два варианта формирования суммарных ОК КМ – (5.5) и (5.10), которым соответствуют два варианта уравнений движения – (5.8) и (5.12). Показанный переход существенно расширяет возможности аналитического исследования динамики и устойчивости.

5. Предложен и обоснован единый обобщенный метод аналитического определения границ устойчивости автобалансировки произвольной РМ с АБУ, основанный на точном приведении исходного характеристического уравнения в форме определителя (7.5) к подсистеме АБУ (8.1) с последующим его разложением на множители (8.2), (8.3) и приближенной заменой (аппроксимацией) некоторых функций. Разложение ХУ на множители оказалось возможным благодаря учету особенностей подсистемы АБУ. Такой подход позволяет понизить порядок определителя до уровня, допускающего реальное применение аналитических критериев устойчивости. Кроме того, этим же путем получена полезная формула (8.4) итерационного уточнения собственных чисел (в том числе собственных частот) подсистемы АБУ.

6. Показано, что исследование упрощается при анализе частных случаев особого расположения КМ в АБУ, при которых геометрический параметр  $D$  принимает значения  $D=0$  и  $D=1$ . Исследование этих частных случаев (в особенности случая  $D=0$ ) с одной стороны расширяет возможности аналитического определения границ устойчивости для сложных РМ, а с другой стороны дает наиболее важную информацию для эффективного практического применения пассивного АБУ.

7. Показана важная возможность аналитического исследования устойчивости без выполнения трудоемкого этапа перехода к уравнениям возмущенного движения с постоянными коэффициентами. В частности такая возможность установлена для исследования РМ любых конструкций, но для важного частного случая  $D=0$ .

Указанные возможности охватывают все практически важные задачи исследования, существенно расширяют перечень задач анализа сложных РМ и позволяют получать более точные формулы для простых РМ с АБУ.

В целом в данной работе получены существенные результаты в области динамики и устойчивости роторных машин широкого класса, оснащенных одним многомассовым автобаланси́ром пассивного типа. В совокупности результаты работы образуют теоретические основы обобщенного (единого) аналитического метода исследования устойчивости автобалансировки РМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической автобалансировки // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – №4. – С. 38-45.
2. Агафонов Ю.В. Исследование устойчивости шарикового автобалансира роторной системы на упругих опорах // Машиноведение. - 1976. - № 6. - с. 3-7.
3. Агафонов Ю.В., Базыкин Ю.В. Исследование устойчивости шарикового автобалансира роторной системы на анизотропных упругих опорах // Машиноведение. - 1985. - № 5. - С. 111-113.
4. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. – М.: Наука, 1981. - 352с.
5. Кравченко В.И. Исследование устойчивости шарового автобалансира рядного типа // Машиноведение. - 1983. - № 1. – С. 25-27.
6. Кравченко В.И. Автоматическая балансировка ротора многомассовой системы шаровым автобалансиром рядного типа // Машиноведение. - 1986. - № 2. – С. 95-99.
7. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. - Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. - 84 с.
8. Филимонихин Г.Б. К устойчивости автобалансирующего устройства со связями, наложенными на движения корректирующих грузов // Док. АН УРСР. Сер. А. - 1990. - № 12. - С. 27-30.
9. Филимонихин Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Доклады НАН Украины, Сер.А. – 1996. № 8. - С.74-78.
10. Філімоніхін Г.Б. Про зрівноваження ротора маятниками, насадженими на осі, що перпендикулярні валу // Доп. НАН України. - 2000. - № 6. - С. 66-70.
11. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла // Вісник, математик-механіка. Київський національний університет. - 2002. – Вип. № 7-8. - С. 67-71.
12. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і видрозахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
13. Горбенко А.Н., Шекун Г.Д. О динамике самобалансирующего устройства в конструкции многодискового ротора // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, 1995, № 3 - с. 48 – 53.
14. Горбенко А.Н. О собственных колебаниях шариков в автобалансирующем

- устройстве ротора // Проблемы машиностроения, 2000, № 1-2 – с. 86-90.
15. Горбенко А.Н., Радченко О.П. Анализ спектра механических колебаний однодискового ротора с шариковым автобалансиром // Авиационно-космическая техника и технология: Сборник научных трудов. - Харьков: "Харьковский авиационный институт", 2000. – Вып. 19. Тепловые двигатели и энергоустановки - с. 461-463.
  16. Горбенко А.Н. Влияние силы тяжести на колебания ротора с шариковым автобалансирующим устройством // Вестник Технологического университета Подолья, 2000, №1 – с. 110-114.
  17. Горбенко А.Н. Влияние расположения шарикового автобалансира в конструкции однодискового ротора на шарнирной и податливой опорах на эффективность автобалансировки // Вестник Технологического университета Подолья, Часть 1. Технические науки, 2001, №1 – с. 43 – 47.
  18. Горбенко А.Н. Некоторые нетривиальные свойства механической системы «ротор – шариковый автобалансир» // Вибрации в технике и технологиях. – 2002. – № 3 (24). – с. 33-36.
  19. Горбенко А.Н. Об устойчивости автобалансировки ротора с помощью шариков // Проблемы прочности – 2003. – № 3 (363). – с. 120-129.
  20. Горбенко А.Н. О формах собственных колебаний механической системы «ротор – автобалансир» // Вибрации в технике и технологиях – 2007. - №2 (47). – с.43-47.
  21. Горбенко А.Н. Изменение границы устойчивости автобалансировки ротора шарами в процессе эксплуатации // Авиационно-космическая техника и технология: Научно-технический журнал. – Харьков: "Харьковский авиационный институт". – 2008. – Вып. 8 (55). - с. 156-159.
  22. Горбенко А.Н. Об условиях устойчивости автобалансировки ротора шарами или маятниками // Вибрации в технике и технологиях – 2008. - №1 (50). – с. 16-22.
  23. Bovik P., Hogfors C. Autobalancing of Rotors // J. Sound and Vibr. 1986. -3, № 3. -P. 429-440.
  24. Chung J., Ro D.S. Dynamic Analysis of an Automatic Dynamic Balancer for Rotating Mechanisms // Journal of Sound and Vibration, Vol. 228(5), 1999, pp. 1035-1056.
  25. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Rigid Rotors // Technische Mechanik. 2004, Vol. 24 No 1, pp. 1-24.
  26. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Auto-Balancing of Anisotropically Supported Rigid

Rotors // Technische Mechanik. 2004, Vol. 24 No 1, pp. 37-50.

27. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения - М.-Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1950. - 472 с.
28. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. - М.: Наука, 1990. - 176 с.
29. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения, изд. 2-е. -М.: Наука, 1966. - 530 с.
30. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
31. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Том 2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.
32. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики.- М. Наука, 1997. – 320 с.
33. Еругин Н.П. Приводимые системы. – Минск: Наука и техника, 1966.
34. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
35. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Киев: Техника, 1977. – 768 с.
36. Тиман А.Ф. Теории приближения функций действительного переменного. – М.: Наука, 1960.
37. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964. – 772 с.

## Приложение А

### Список сокращений

- АБУ – автобалансирующее устройство;
- КМ – компенсирующая масса;
- МС – механическая система;
- ОК – обобщенная координата;
- РМ – роторная машин;
- ХП – характеристический полином;
- ХУ – характеристическое уравнение;
- ЦМ – центр масс.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка проблемы. Анализ существующих исследований. Цель работы.	2
2. Класс рассматриваемых механических систем	5
3. Уравнения движения и особенности их структуры в общем случае	6
4. Уравнения абсолютно синхронного движения	10
5. Уравнения возмущенного движения. Переход к суммарным координатам компенсирующих масс.	14
6. Переход к уравнениям возмущенного движения с постоянными коэффициентами	19
7. Характеристическое уравнение и его формы	22
8. Основы методов приближенного анализа устойчивости автобалансировки на основе характеристического уравнения	27
8.1 Общие соображения	27
8.2 Приближенные методы анализа на основе разложения характеристического уравнения на множители с последующей аппроксимацией	30
8.3. Некоторые заметки относительно других методов приближенного анализа устойчивости	37
9. Анализ устойчивости автобалансировки в частных (особых) случаях	38
10. Возможности анализа устойчивости на основе уравнений возмущенного движения с периодическими коэффициентами	42
Заключение	47
Литература	49
Приложение А. Список сокращений	51