А.Н. Горбенко

Керченский государственный морской технологический университет
Керчь, Украина

УДК 62-755

О ФОРМАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «РОТОР – АВТОБАЛАНСИР»

У роботі одержані основні особливості форм власних коливань однедискового ротора, що обертається, зі автобалансиром пасивного типу при автобалансуючому русі механічної системи.

The basic features of own forms of vibrations of the revolved one disk rotor with the passive type autobalancer at autobalancing motion of the mechanical system are got in this article.

1. Постановка проблемы. Анализ существующих исследований. Цель работы.

Для снижения вибрации роторных машин находят применение автобалансирующие устройства (АБУ) пассивного типа (см. например [1-8]). Полноценное исследование динамики любой механической системы предполагает изучение особенностей её собственных колебаний. Однако обзор литературных источников показывает, что к настоящему времени отсутствует анализ форм собственных колебаний. Установлены лишь основные особенности частотного спектра собственных колебаний [5, 7].

Целью данной работы является изучение форм собственных колебаний механической системы «вращающийся ротор – шариковое (маятниковое) АБУ» в режиме автобалансировки.

2. Уравнения движения

Рассмотрим однодисковый ротор на двух изотропных опорах. Статически неуравновешенный диск ротора расположен посередине между опорами и совершает плоское движение. В плоскости диска расположен автобалансир с компенсирующими массами (КМ) в виде шариков или маятников (рис.1).

Уравнения движения данной механической системы во вращающейся системе координат *u*, *v* имеет вид [5, 7]

$$w_a'' + (\beta + 2i\omega)w_a' + \left(p^2 - \omega^2 + i\beta\omega\right)w_a = \\ = \mu_c r\omega^2 + \mu R\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\varphi_j'\right)^2 - i\varphi_j''\right]e^{i(\varphi_j-\omega t)};$$

$$R\varphi_j'' + R\beta_0\left(\varphi_j' - \omega\right) = \qquad (1)$$

$$= \left(u_a'' - 2\omega v_a' - \omega^2 u_a\right)\sin(\varphi_j - \omega t) - \\ -\left(v_a'' + 2\omega u_a' - \omega^2 v_a\right)\cos(\varphi_j - \omega t),\ j = 1,2,\ldots,n,$$

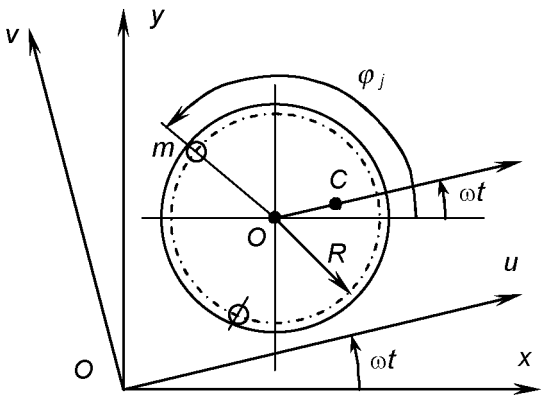

Рисунок 1 – Механическая система «ротор –автобалансир»

где

$$w_a = u_a + iv_a;\ p^2 = K/M_\Sigma;\ M_\Sigma = M + nm;$$

$$\mu = \frac{m}{M_\Sigma};\ \mu_c = \frac{M}{M_\Sigma};\quad (\,)' = \frac{d}{dt};$$

u_a, v_a, w_a, – текущие вещественные и комплексная координаты центра диска (точки О), м; K – жесткость вала и его опор, приведенная к центру диска, Н/м; M – масса диска, кг; p – критическая скорость вращения ротора с жестко закрепленными КМ, рад/с; ω – угловая скорость вращения ротора, рад/с; φ_j – текущая угловая координата j-й КМ, рад; β – коэффициент внешнего вязкого демпфирования ротора, 1/с; r – эксцентриситет, м; m, n – масса одной КМ (кг) и их количество; R – радиус окружности движения центров масс КМ в АБУ, м; β_0 – коэффициент внутреннего вязкого сопротивления движению КМ в АБУ, 1/с; i – мнимая единица.

Введем безразмерные время и параметры:

$$\tau = pt;\ \frac{d}{dt} = p\frac{d}{d\tau};\ (\dot{\ }) = \frac{d}{d\tau};\ \Omega = \frac{\omega}{p};\ \omega t = \Omega\tau;$$

$$u = \frac{u_a}{r_n};\ v = \frac{v_a}{r_n};\ w = \frac{w_a}{r_n};\ r^* = \frac{r}{r_n};$$
$$B = \frac{\beta}{p};\ B_0 = \frac{\beta_0}{p};\ \rho = \frac{R}{r_n};$$

r_n – нормирующий размер, в качестве которого можно принять например эксцентриситет r.

С учетом этого безразмерные уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&\ddot{w} + (B + 2i\Omega)\dot{w} + \left(1 - \Omega^2 + iB\Omega\right)w = \\
&= \mu_c r^* \omega^2 + \mu\rho\sum_{j=1}^{n}\left[\dot{\varphi}_j{}^2 - i\ddot{\varphi}_j\right]e^{i\left(\varphi_j - \Omega\tau\right)};\\
&\rho\ddot{\varphi}_j + \rho B_0\left(\dot{\varphi}_j - \Omega\right) = \\
&= \left(\ddot{u} - 2\Omega\dot{v} - \Omega^2 u\right)\sin\left(\varphi_j - \Omega\tau\right) - \\
&- \left(\ddot{v} + 2\Omega\dot{u} - \Omega^2 v\right)\cos\left(\varphi_j - \Omega\tau\right),\quad j = 1,2,\ldots,n\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Система уравнений (2) допускает точное стационарное решение, соответствующее режиму автобалансировки ротора, при котором смещения диска отсутствует, а шарики (маятники) неподвижны относительно ротора и вращаются вместе с ним. Будем называть такое движение идеальной автобалансировкой. При этом механическая система движется согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&w = w_0 = u_0 + iv_0 = 0;\ u_0 = 0;\ v_0 = 0;\\
&\varphi_j = \varphi_{0j} = \Omega\tau + \alpha_j\,,\quad j = 1,2,\ldots n;\\
&\sum_{j=1}^{n}\sin\alpha_j = 0;\\
&\sum_{j=1}^{n}\cos\alpha_j = \sum_{j=1}^{n}e^{i\varphi_j} = -\frac{Mr}{mR} = -\frac{\mu_c r^*}{\mu\rho},
\end{aligned} \tag{3}$$

где α_j – постоянное автобалансирующее угловое положение j-го шара (маятника) относительно ротора.

В отличие от идеальной автобалансировки реальное движение сопровождается всегда имеющимися возмущениями. В результате этого механическая система движется, совершая малые свободные колебания относительно идеальной траектории. При этом обобщенные координаты представляются в виде

$$\begin{aligned}
&w = w_0 + w_1;\ u = u_0 + u_1;\ v = v_0 + v_1;\\
&\varphi_j = \varphi_{0j} + \psi_j = \Omega\tau + \alpha_j + \psi_j\,,\ j = 1,2,\ldots n\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $w_1 = u_1 + iv_1$; w_1, ψ_j – малые переменные величины (отклонения), характеризующие собственные колебания.

Далее, подставив (4) в (2) с учетом (3) и пренебрегая слагаемыми высших порядков малости, получаем уравнения собственных колебаний при автобалансирующем режиме

$$\begin{aligned}
&\ddot{w}_1 + (B + 2i\Omega)\dot{w}_1 + \left(1 - \Omega^2 + iB\Omega\right)w_1 = \\
&= \mu\rho\sum_{j=1}^{n}\left[2\Omega\dot{\psi}_j + i\left(\Omega^2\psi_j - \ddot{\psi}_j\right)\right]e^{i\alpha_j};\\
&\rho\ddot{\psi}_j + \rho B_0\dot{\psi}_j = \\
&= \left(\ddot{u}_1 - 2\Omega\dot{v}_1 - \Omega^2 u_1\right)\sin\alpha_j - \\
&- \left(\ddot{v}_1 + 2\Omega\dot{u}_1 - \Omega^2 v_1\right)\cos\alpha_j\,,\quad j = 1,2,\ldots,n\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что полученная система совпадает с уравнениями возмущенного движения при анализе устойчивости.

Анализ системы линейных уравнений собственных колебаний (5) в общем случае затрудняется тем, что количество уравнений и неизвестных в ней зависит от числа КМ n. Покажем, что существует возможность перейти от системы (5) к эквивалентной системе дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными функциями независимо от параметра n. Для этого введем новые переменные:

$$\psi_s = \sum_{j=1}^{n}\psi_j\sin\alpha_j\ ;\quad \psi_c = \sum_{j=1}^{n}\psi_j\cos\alpha_j\ . \tag{6}$$

Новые переменные характеризуют смещение общего центра масс всех КМ относительно его стационарного положения при идеальной автобалансировке во вращающейся системе координат: ψ_s – вдоль линии дисбаланса (в обратном направлении оси “u”), ψ_c – поперек линии дисбаланса (вдоль оси “v”).

Переменные ψ_s , ψ_c уже фактически присутствуют в уравнении движения ротора (см. первое уравнение в (5)). Далее уравнение для j-й КМ умножаем на $\sin\alpha_j$ ($\cos\alpha_j$) и суммируем по всем КМ j=1,2,…,n . В результате вместо n уравнений движения КМ получаем два уравнения движения их общего центра масс.

В итоге после преобразований получаем систему дифференциальных уравнений собственных колебаний системы, которую можно представить в следующем вещественном матричном виде:

$$\begin{aligned}
&\{\ddot{w}\} + [A_\beta]\{\dot{w}\} + [A_p]\{w\} - \\
&- \mu\rho\left([E_a]\{\ddot{\psi}\} + 2\Omega[E_b]\{\dot{\psi}\} - \Omega^2[E_a]\{\psi\}\right) = 0\,;\\
&-\frac{1}{2\rho}[d_c]\{\ddot{w}\} + \frac{\Omega}{\rho}[d_s]\{\dot{w}\} + \frac{\Omega^2}{2\rho}[d_c]\{w\} + \\
&+ \{\ddot{\psi}\} + B_0\{\dot{\psi}\} = 0\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix};\quad \{\psi\} = \begin{Bmatrix} \psi_s \\ \psi_c \end{Bmatrix};$$

$$[E_a]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};\quad [E_b]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix};$$

$$[A_\beta]=\begin{bmatrix}B & -2\Omega\\ 2\Omega & B\end{bmatrix};\quad [A_p]=\begin{bmatrix}\left(1-\Omega^2\right) & -B\Omega\\ B\Omega & \left(1-\Omega^2\right)\end{bmatrix};$$

$$[d_c]=\begin{bmatrix}(n-D_c) & -D_s\\ D_s & -(n+D_c)\end{bmatrix};\quad D_c=\sum_{j=1}^{n}\cos 2\alpha_j\ ;$$

$$[d_s]=\begin{bmatrix}D_s & (n-D_c)\\ (n+D_c) & D_s\end{bmatrix};\quad D_s=\sum_{j=1}^{n}\sin 2\alpha_j\ .$$

Вводя общий вектор неизвестных

$$\{q\}=\begin{Bmatrix}\{w\}\\ \{\psi\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ \psi_s\\ \psi_c\end{Bmatrix},$$

уравнения собственных колебаний можно записать в компактном виде

$$[M]\{\ddot{q}\}+[H]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=0\,, \qquad (8)$$

где

$$[M]=\begin{bmatrix}[E] & -\mu\rho[E_a]\\ -\dfrac{1}{2\rho}[d_c] & [E]\end{bmatrix};$$

$$[H]=\begin{bmatrix}[A_\beta] & -2\mu\rho\Omega[E_b]\\ \dfrac{\Omega}{\rho}[d_s] & B_0[E]\end{bmatrix};$$

$$[K]=\begin{bmatrix}[A_p] & \mu\rho\Omega^2[E_a]\\ \dfrac{\Omega^2}{2\rho}[d_c] & [0]\end{bmatrix}.$$

Здесь [*E*], [0] – единичная и нулевая матрицы размера 2 на 2.

3. Особенности собственных колебаний

Уравнения (8) будут удовлетворены, если положить

$$\{q\}_k=\{Q\}_k\,e^{\Delta_k\tau}\ , \qquad (9)$$

где

$\{Q\}_k=\begin{pmatrix}U & V & \Psi_s & \Psi_c\end{pmatrix}^T$ – вектор комплексных амплитуд собственных колебаний системы; Δ_k – безразмерное собственное число (характеристический показатель) механической системы; k – номер формы колебаний.

В результате подстановки (9) в (8) получаем систему из четырех алгебраических уравнений проблемы собственных значений в квадратичной форме [9]

$$\left([M]\Delta_k^2+[H]\Delta_k+[K]\right)\{Q\}_k=0\,. \qquad (10)$$

Собственные числа определяются как корни характеристического уравнения

$$\left|[M]\Delta_k^2+[H]\Delta_k+[K]\right|=0\,. \qquad (11)$$

Из (7)-(11) очевидно, что механическая система имеет четыре собственные частоты и соответствующие им формы колебаний (независимо от числа КМ). Собственные частоты колебаний p_k являются модулем мнимой части собственных чисел.

Известны приближенные формулы для собственных чисел и частот [7, 5]

$$\Delta_{1-4}=-\frac{B_0}{2}\pm ip_{1,2};\quad p_{1,2}=\sqrt{\frac{1}{2}n\mu\left(1\pm\sqrt{D}\right)\frac{\Omega^4}{\Omega^2-1}};$$

$$\Delta_{5-8}=-\frac{B}{2}\pm ip_{3,4}\ ;\quad p_{3,4}=\Omega\pm 1\,. \qquad (12)$$

где $D=\left(D_c^2+D_s^2\right)\!/n^2$.

Из (12) с учетом характерных диапазонов значений параметров ($n\mu$=0,001…0,01; D=0…1) видны следующие основные особенности спектра частот собственных колебаний ротора с АБУ в режиме автобалансировки. Все собственные частоты делятся на две различные группы: группа малых частот $p_{1,2}$, соответствующих медленным колебаниям КМ в АБУ, и группа частот $p_{3,4}$, соответствующих быстрым движениям собственно ротора. На рис.2 в качестве примера показан частотный спектр, рассчитанный на основе (11) при параметрах: n=2, μ=0,005, D=0,5, B_0=0,005, B=0,1, Ω=1,8. При этом качественный вид спектра сохраняется независимо от числа КМ. Количественно же значения малых частот $p_{1,2}$ зависят частоты вращения ротора Ω и от параметров системы. В зависимости от параметров и конкретного расположения КМ в АБУ (что влияет на параметр D при n=3 и более) частоты p_1 и p_2 могут быть близки друг к другу, либо равны (при D =0), либо наименьшая частота может быть нулевой (при D=1). При этом чем выше Ω, тем больше отличаются значения частот $p_{1,2}$ от $p_{3,4}$. В общем случае значения частот $p_{1,2}$ не превышают величины:

$$p_{1,2}\ \le\ \sqrt{n\mu}\ \Omega\,.$$

Отметим, что при n=2 автобалансирующее расположение КМ в АБУ однозначно и параметр D=0, если емкость автобалансира $E=2^{0,5}$, и D =1, если E=1 или ∞ ($E=n\mu R/(\mu_c r)$).

Проанализируем далее формы собственных колебаний ротора с АБУ. Собственный вектор $\{Q\}_k$ k-й формы колебаний с точностью до постоянного множителя

определяется на основе решения системы (10) при подстановке туда собственного числа Δ_k. Причем в общем случае собственные вектора комплексные вследствие диссипативности системы [9]. Движение во времени $\{q\}_k=f(\tau)$ механической системы по k-й форме колебаний определяется как вещественная часть выражения (9) [9, 10]. С целью анализа была выполнена серия расчетов форм колебаний при характерных диапазонах параметров: $n\mu$=0,001…0,01; D=0…1; B_0=0,001…0,01; B=0,01…0,2.

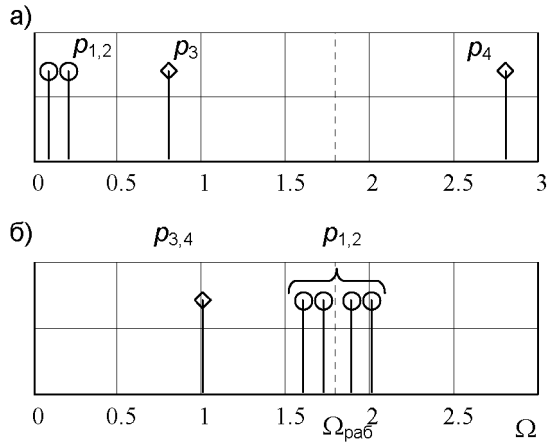

Рисунок 2 – Спектр собственных частот колебаний во вращающейся (а) и неподвижной (б) системах координат

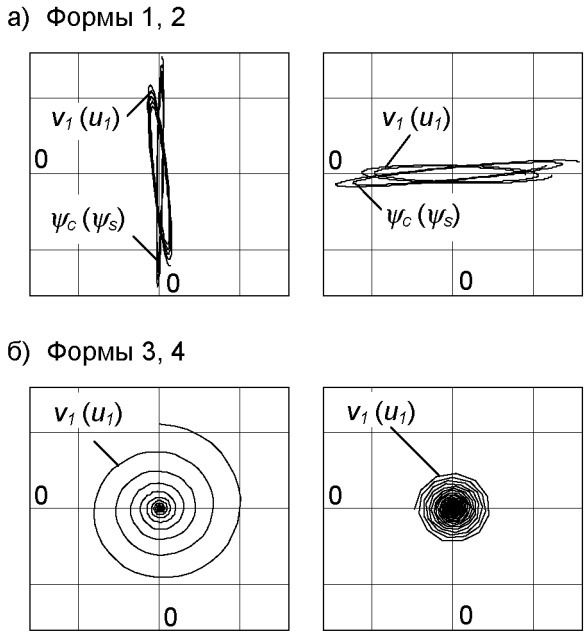

Рисунок 3 – Формы собственных колебаний во вращающейся системе координат

На рис.3 показаны типичные графики собственных колебаний, рассчитанные при n=2, μ=0,005, D=0,5, B_0=0,005, B=0,1, Ω=1,8. Из них видно, что также как и частотный спектр формы колебаний делятся на две качественно различные группы.

Формы 1 и 2 соответствуют медленным колебаниям КМ в АБУ с частотами p_1 и p_2. При этом общий центр масс КМ, а также центр диска, движутся по траектории эллипса, существенно вытянутого вдоль линии дисбаланса диска (ось u) или перпендикулярно к ней (ось v). Очевидно, что такому характеру движения соответствуют два варианта колебаний компенсирующих масс относительно ротора: противофазное движение КМ в противоположные стороны и синхронное движение всех (или большей части) КМ в одну сторону. Указанная особенность проиллюстрирована на рис.4.

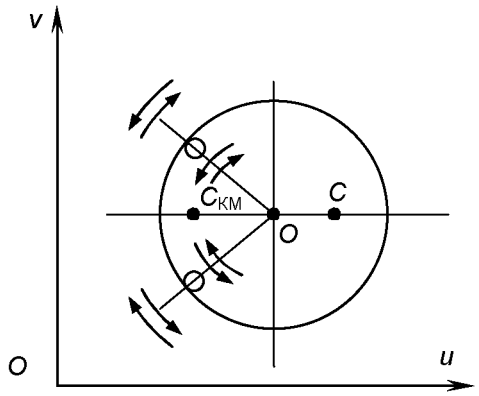

Рисунок 4 – Характер собственных колебаний компенсирующих масс в АБУ относительно ротора (формы 1, 2)

Формы 3 и 4 соответствуют колебаниям ротора с частотами p_3 и p_4. Они качественно совпадают с формами собственных колебаний ротора без АБУ. Движение происходит по траектории, близкой к спирали. Причем КМ почти неподвижны относительно диска (графики $\psi_c(\psi_s)$ на рис.3б сливаются в точку).

В случае если автобалансирующее движение устойчиво, то все формы колебаний являются затухающими.

Важным с точки зрения практики является вопрос о границе устойчивости автобалансировки. С целью выявления особенностей поведения системы на границе устойчивости были проведены серии расчетов при различных частотах вращения Ω и различных параметрах системы. Факт перехода через границу устойчивости (критическую скорость Ω_k) при изменении частоты вращения

определялся по знаку вещественной части собственных чисел Δ.

В результате анализа результатов расчетов установлено, что потеря устойчивости может происходить по любой из форм собственных колебаний. На рис. 5 показано типичное изменение вещественных частей собственных чисел (коэффициентов демпфирования системы) при изменении частоты вращения ротора. Данные графики рассчитаны при указанных выше параметрах системы.

В целом можно отметить следующую тенденцию. В случае если внутреннее демпфирование движения КМ в АБУ (параметр B_0) относительно мало, то потеря устойчивости происходит по одной из форм колебаний КМ (формы 1, 2). Если же относительно мало внешнее демпфирование движения ротора (параметр B), то потеря устойчивости происходит по одной из форм ротора (формы 3, 4). Судя по выполненным расчетам, указанная смена наиболее опасной формы собственных колебаний имеет место при изменении непосредственного соотношения значений параметров B_0 и B. Однако, последнее утверждение требует дальнейшей проверки и анализа.

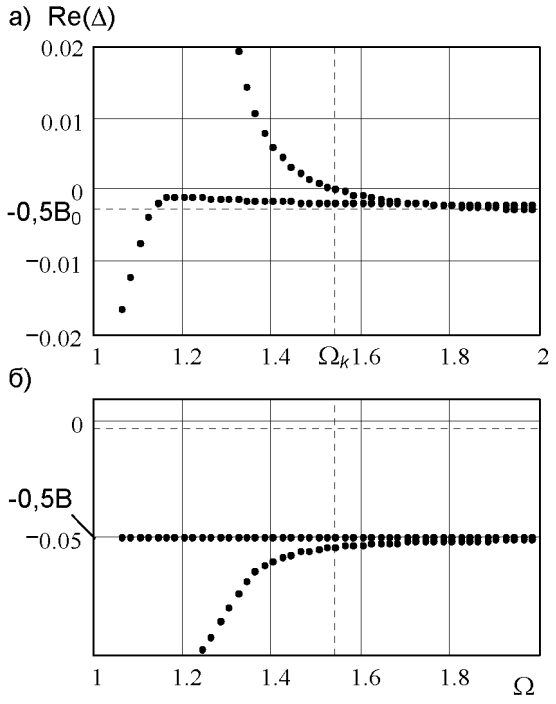

Рисунок 5 – Коэффициенты демпфирования по формам 1, 2 (а) и формам 3,4 (б) в зависимости от частоты вращения ротора

Выводы

Полученные в работе результаты дополняют известную к настоящему времени совокупность сведений об особенностях динамики механической системы «вращающийся ротор – шариковый (маятниковый) автобалансир». Установлено, что формы собственных колебаний системы явно подразделяются на колебания, вызванные относительным движением компенсирующих масс в АБУ, и колебания, вызванные движением самого ротора. Анализ показал, что с точки зрения устойчивости автобалансировки наиболее опасной может быть любая из форм колебаний. Полученные сведения будут полезны при дальнейших теоретических исследованиях и практическом применении автобалансиров.

Литература

1. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической автобалансировки // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – №4. – С. 38-45.

2. Автоматическая балансировка роторов машин / А.А.Гусаров, В.И.Сусанин, Л.Н.Шаталов, Б.М.Грушин. - М.: Наука, 1979. – 151 с.

3. Рейбах Ю.С. Устройства для балансировки шлифовальных кругов. – М.: НИИМАШ, 1967. – 84 с.

4. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. - Томск: Томский ун-т, 1985. - 84 с.

5. Филимонихин Г.Б. Зрівноваження і виброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352с.

6. Филимонихин Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Доклады НАН Украины, Сер.А. – 1996. № 8. -С.74-78.

7. Горбенко А.Н. Об устойчивости автобалансировки ротора с помощью шариков // Проблемы прочности – 2003. – № 3 (363). – с. 120-129.

8. Горбенко А.Н. Конечно-элементный анализ динамики ротора с автобалансирующими устройствами // Вибрации в технике и технологиях – 2004. - №6(38). – с. 127- 130.

9. Вибрации в технике: Справочник. Том 1. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. – 368 с.

Библиографическое описание статьи:

Горбенко А.Н. О формах собственных колебаний механической системы «ротор – автобалансир» // Вибрации в технике и технологиях – 2007. - №2 (47). – с.43-47.