

А.Н. Горбенко

УДК 62-755

# КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ РОТОРА С АВТОБАЛАНСИРУЮЩИМИ УСТРОЙСТВАМИ

В работе представлен метод конечно-элементного анализа динамики реального ротора с автобалансировками. Для моделирования движения корректирующих масс разработан специальный конечный элемент. Даны результаты расчетного анализа динамики ротора газотурбинного нагнетателя оснащенного шариковыми автобалансировками.

## 1. Постановка задачи

Одним из путей совершенствования роторных машин различного назначения является применение в них пассивных автобалансирующих устройств (АБУ). Подобные устройства позволяют непосредственно во время работы снижать амплитуды колебаний ротора, что повышает ресурс машины. Кроме того, применение АБУ открывает возможность улучшить характеристики машин роторного типа за счет уменьшения назначаемых зазоров в уплотнениях и увеличения рабочей частоты вращения ротора.

Практическое применение АБУ требует детального анализа их динамики в составе реального ротора с целью определения условий обеспечения устойчивости и эффективности режима автобалансировки. Существующие в настоящее время методы теории автобалансировки [1-4 и др.] не позволяют это делать, поскольку ограничиваются рассмотрением лишь простейших моделей роторов, что объясняется сложностью свойств подобной нелинейной механической системы. В настоящей работе предложен метод расчетного анализа динамики ротора произвольной конструкции, оснащенного автобалансирующими устройствами, на базе метода конечных элементов (МКЭ).

## 2. Расчет динамики ротора

Основы расчета динамики ротора с помощью МКЭ отражены в работах [5-7]. В соответствии с общей идеей метода ротор разбивается на конечные элементы (КЭ) вдоль вала (рисунок 1). Основные типы КЭ: участок вала с распределенными параметрами, неуравновешенный диск, подшипник на податливом основании. Каждый КЭ имеет узловые точки (узлы), движение которых полностью определяет движение КЭ. Вектор перемещений одного узла имеет вид:  $\{x \ u \ \phi_x \ \phi_y\}^T$ , где  $x, u$  – линейные поперечные перемещения узла;  $\phi_x, \phi_y$  – угловые перемещения узлового сечения вала вокруг координатных осей.

Уравнения движения каждого типа КЭ ротора выводятся на основе обобщенного принципа

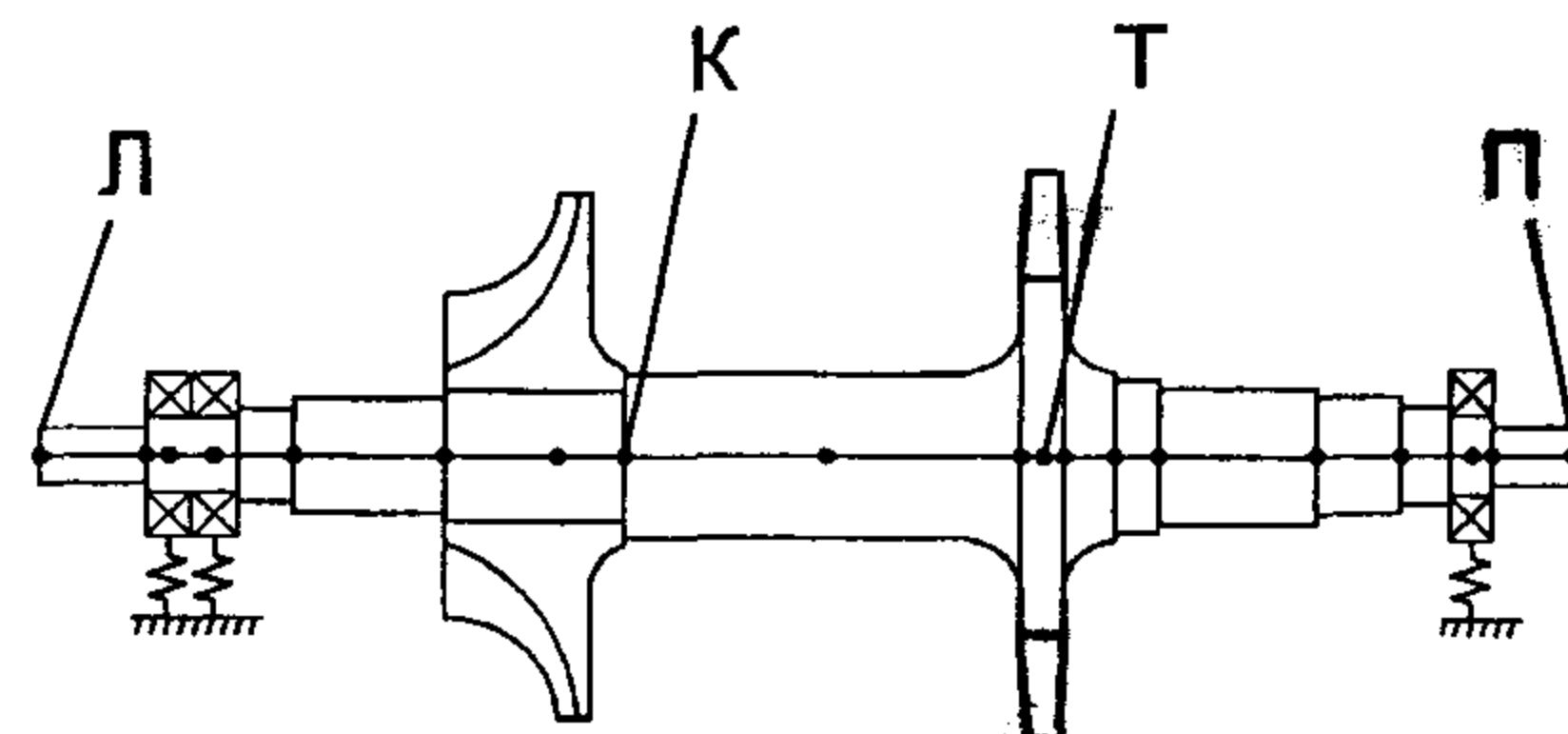


Рис.1. Конечно-элементная модель ротора

Гамильтона или уравнений Лагранжа второго рода. В общем виде уравнения движения КЭ представляются в форме матричных уравнений [5-7]: для КЭ участка вала

$$[M_r]\{\ddot{q}_r\} + (\omega[G_r] + [C_r])\{\dot{q}_r\} + [K_r]\{q_r\} = \{Q_r\} + \{Q_r^{int}\};$$

для КЭ диска

$$[M_d]\{\ddot{q}_d\} + (\omega[G_d] + [C_d])\{\dot{q}_d\} = \{Q_d\} + \{Q_d^{int}\};$$

для КЭ подшипниковой опоры

$$[C_b]\{\dot{q}_b\} + [K_b]\{q_b\} = \{Q_b\} + \{Q_b^{int}\},$$

где  $\{q_r\}, \{q_d\}, \{q_b\}$  – векторы узловых перемещений КЭ, являющиеся функциями от времени;  $[M_r], [M_d]$  – матрицы масс КЭ;  $[G_r], [G_d]$  – матрицы гирокопичности КЭ;  $[C_r], [C_d], [C_b]$  – матрицы демпфирования КЭ;  $[K_r], [K_b]$  – матрицы жесткости КЭ;  $\{Q_r^{int}\}, \{Q_d^{int}\}, \{Q_b^{int}\}$  – векторы внутренних узловых сил КЭ;  $\{Q_r\}, \{Q_d\}, \{Q_b\}$  – векторы внешних узловых сил КЭ, в том числе от неуравновешенности.

Движение всего ротора (как ансамбля собранных друг с другом КЭ) описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [H]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\}, \quad (1)$$

где  $[H] = \omega[G] + [C]$ ;  $[M], [G], [C], [K]$  – матрицы масс, гирокопичности, демпфирования и жесткости ко-

нечно-елементной модели ротора;  $\{q\}$ ,  $\{G\}$  – векторы узловых перемещений и внешних узловых сил конечно-элементной модели ротора.

Приведенные уравнения позволяют выполнять основные процедуры численного анализа динамики вращающегося ротора – определение критических частот вращения, расчеты амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), расчеты установившихся колебаний и переходных процессов. Далее необходимо разработать расчетные процедуры, учитывающие наличие автобалансиров в составе ротора.

### 3. Расчет динамики ротора с автобалансирами

Общий подход к конечно-элементному моделированию движения ротора с АБУ, предлагаемый в настоящей работе, состоит в следующем. Количество АБУ в составе ротора может быть произвольным. Каждый АБУ считается прикрепленным к одному из узлов ротора и расположенным в поперечной плоскости вала. Все известные виды пассивных автобалансиров обобщенно представляют собой набор корректирующих масс (КМ), имеющих возможность перемещаться относительно ротора в поперечной плоскости. Исходя из этого, представляется наиболее рациональным моделировать движение каждой КМ в отдельности путем добавления к конечно-элементной модели ротора соответствующего конечного элемента – КЭ КМ АБУ. Уравнения движения таких КЭ КМ должны связывать между собой текущие координаты, определяющие положение КМ, и текущие линейные и угловые координаты узла ротора, в поперечной плоскости которого расположена данная КМ. Каждый КЭ КМ моделирует движение одной корректирующей массы. Соответственно каждый из автобалансиров, установленных на роторе, моделируется набором из нескольких КЭ КМ. В целом же рассматриваемая механическая система «ротор – АБУ» состоит из соединенных между собой – КЭ участков податливого ротора с распределенными параметрами, КЭ неуравновешенных дисков, КЭ подшипниковых опор и КЭ КМ, собранных в автобалансиры.

Получим уравнения движения КЭ КМ автобалансира шарикового типа. Текущее положение КМ (шара) в пространстве полностью определяется текущими координатами координатами  $x_i$ ,  $y_i$  i-го узла ротора, к которому прикреплен АБУ, радиусом  $R$  окружности возможного движения КМ относительно ротора и текущей угловой координатой  $\varphi_s$  (см. рисунок 2). В качестве вектора узловых перемещений КЭ КМ принимаем вектор  $\{q_s\} = \{x_i \ y_i \ \varphi_s\}^T$ .

Шар, двигаясь по беговой дорожке относительно ротора, вращается вокруг собственной оси вращения без скольжения. С учетом этого кинетическая энергия КМ может быть представлена в виде:

$$T = 0,5m(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) + 0,5J_k\omega_s^2, \quad (2)$$

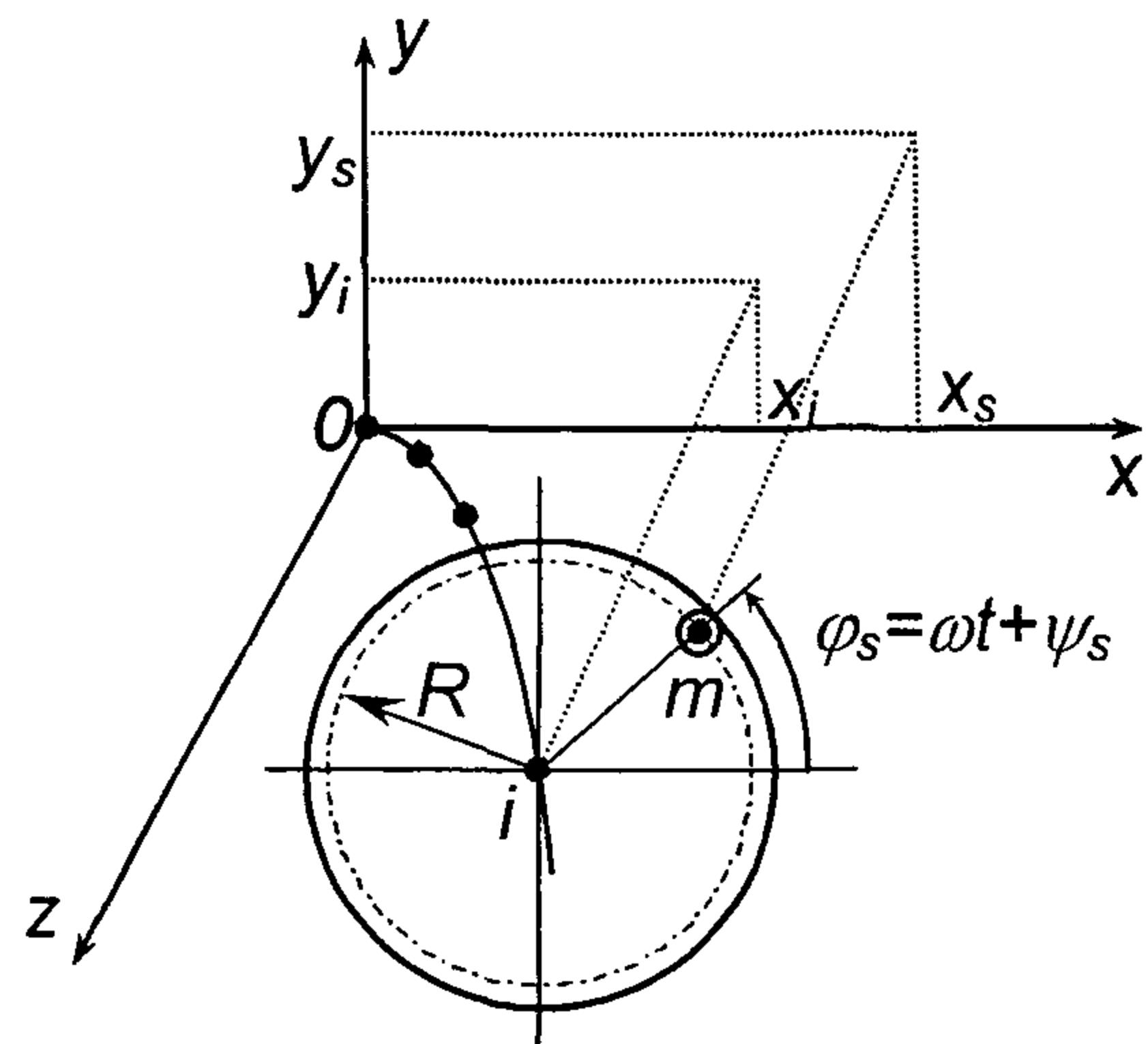


Рис.2. Конечный элемент корректирующей массы автобалансира шарикового типа

где  $x_s = x_i + R\cos\varphi_s$ ;  $y_s = y_i + R\sin\varphi_s$ ;  $\omega_s = \dot{\varphi}_s R/r$ ;  $m$ ,  $r$  – масса и радиус шара;  $J_k$  – массовый момент инерции КМ относительно собственной оси вращения;  $\omega_s$  – угловая скорость собственного вращения КМ.

На узлы КЭ КМ действуют следующие внешние (активные) силы: сила вязкого сопротивления движению шара относительно ротора  $T_k$ ; момент сопротивления качения  $M_k$ ; сила тяжести. Используя известные методы теоретической механики, получаем следующие выражения для обобщенных внешних сил:

$$\begin{aligned} Q_{xi} &= 0; \quad Q_{yi} = -mg; \\ Q_{\varphi s} &= -RT_k - \frac{R}{r}M_k - mgR\cos\varphi_s, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $T_k = \beta_0 R(\dot{\varphi}_s - \omega)$ ;  $M_k = N\beta_k \operatorname{sign}(\dot{\varphi}_s - \omega)$ ;  $N = m(R\dot{\varphi}_s^2 - \ddot{x}_i \cos\varphi_s - \ddot{y}_i \sin\varphi_s - g\sin\varphi_s)$ ;  $\beta_0$ ,  $\beta_k$  – коэффициенты вязкого сопротивления и трения качения шара;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\omega$  – угловая скорость вращения ротора.

Далее подставляем (2) и (3) в уравнения Лагранжа второго рода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} &= Q_{xi} + Q_{xi}^{\text{int}}; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} &= Q_{yi} + Q_{yi}^{\text{int}}; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_s} &= Q_{\varphi s} + Q_{\varphi s}^{\text{int}}. \end{aligned}$$

В результате преобразований получаем уравнения движения КЭ КМ в следующем виде:

$$[M_s]\{\ddot{q}_s\} = \{Q_s\} + \{Q_s^{\text{int}}\}, \quad (4)$$

$$\text{где } [M_s] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_s \end{bmatrix}; \quad \{q_s\} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ \varphi_s \end{Bmatrix};$$

$$\{Q_s\} = \begin{cases} mR(\dot{\phi}_s^2 \cos \varphi_s + \ddot{\phi}_s \sin \varphi_s) \\ mR(\dot{\phi}_s^2 \sin \varphi_s - \ddot{\phi}_s \cos \varphi_s) - mg \\ mR\ddot{x}_i \sin \varphi_s - mR(\ddot{y}_i + g)\cos \varphi_s - \\ - b_0(\dot{\phi}_s - \omega) - b_k \sigma_\phi [R\dot{\phi}_s^2 - \\ - \ddot{x}_i \cos \varphi_s - (\ddot{y}_i + g)\sin \varphi_s] \end{cases};$$

$$J_s = mR^2 + J_k \frac{R^2}{r^2}; b_0 = \beta_0 R^2; b_k = \beta_k m \frac{R}{r};$$

$$\sigma_\phi = \text{sign}(\dot{\phi}_s - \omega);$$

$\{Q_s^{int}\}$  – вектор внутренних узловых сил. Для шара  $J_s = 1,4mR^2$ .

Полученные уравнения являются нелинейными. В (4) все нелинейные слагаемые сгруппированы в правой части уравнений, что удобно для последующего анализа. Очевидно, что возможны и другие формы записи этих уравнений. Отметим, что уравнения (4) могут быть получены также на основе обобщенного принципа Гамильтона.

Производя сборку всех КЭ, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений движения всей конечно-элементной модели ротора с АБУ. Вид этой системы совпадает с (1), однако вектор  $\{Q\}$  является нелинейной функцией вектора  $\{q\}$  перемещений узлов модели.

Поскольку рассматриваемая механическая система отличается весьма сложными нелинейными свойствами, в качестве основного способа исследования её динамики принимаем расчетный численный анализ переходного процесса от некоторого заданного начального состояния до установившегося движения. Сравнительный анализ методов численного интегрирования систем дифференциальных уравнений показал, что наиболее эффективным из них для данной задачи является метод Ньюмарка в его безусловно устойчивом варианте [8]. На каждом шаге интегрирования итерационно уточняются текущие значения векторов  $\{Q\}$  и  $\{q\}$ . В качестве начальных условий задается движение системы, близкое к автобалансировочному движению.

Анализ установившегося в результате переходного процесса движения позволяет определить, во-первых, устойчива ли при заданных условиях автобалансировка и, во-вторых, насколько она эффективна. В качестве критериев эффективности автобалансировки используются амплитуды колебаний ротора и амплитуды усилий в опорах.

Полученные расчетные уравнения и реализующие их компьютерные программы позволяют проводить анализ динамики реальной роторной системы с автобалансировками с учетом следующих факторов: распределенный характер жесткостных и инерционных свойств ротора; гироскопические свойства дисков и вала; демпфирование опор и дисков; произвольное количество, податливость и анизотропичность опор; наличие статического и динамического дисбалансов дисков; распределенный дисбаланс вала; действие внешних сил на ротор, включая силу тяжести; произвольное количество автобалансиров с произвольным числом КМ.

С использованием разработанного метода проведен расчетный анализ динамики ротора газо-

турбинного нагнетателя типа Н7 судового дизеля 8ZD72/48-AL1. На рисунке 1 приведена его конечно-элементная модель. Его рабочая частота составляет 12500 об/мин. Опоры – подшипники качения, установленные в податливый корпус. В расчетной модели опоры заданы изотропными, демпферными. Диски компрессора и турбины имеют статический дисбаланс, соответствующий условиям эксплуатации.

На первом этапе были проведены расчеты динамических характеристик исходного ротора (без АБУ), результаты которых представлены на рисунках 3 – 6.

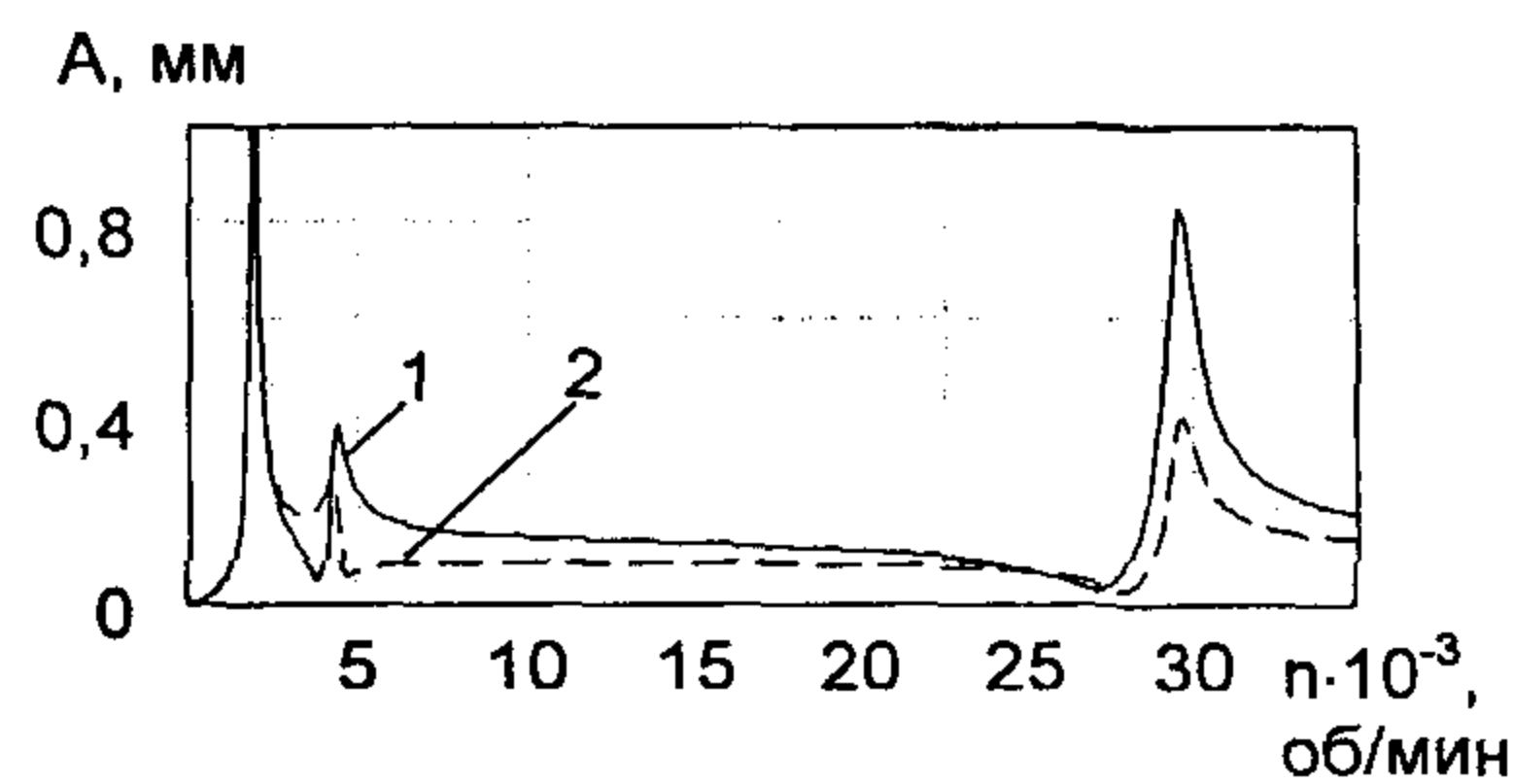


Рис.3. Амплитудно-частотная характеристика колебаний колеса компрессора (1) и турбины (2)

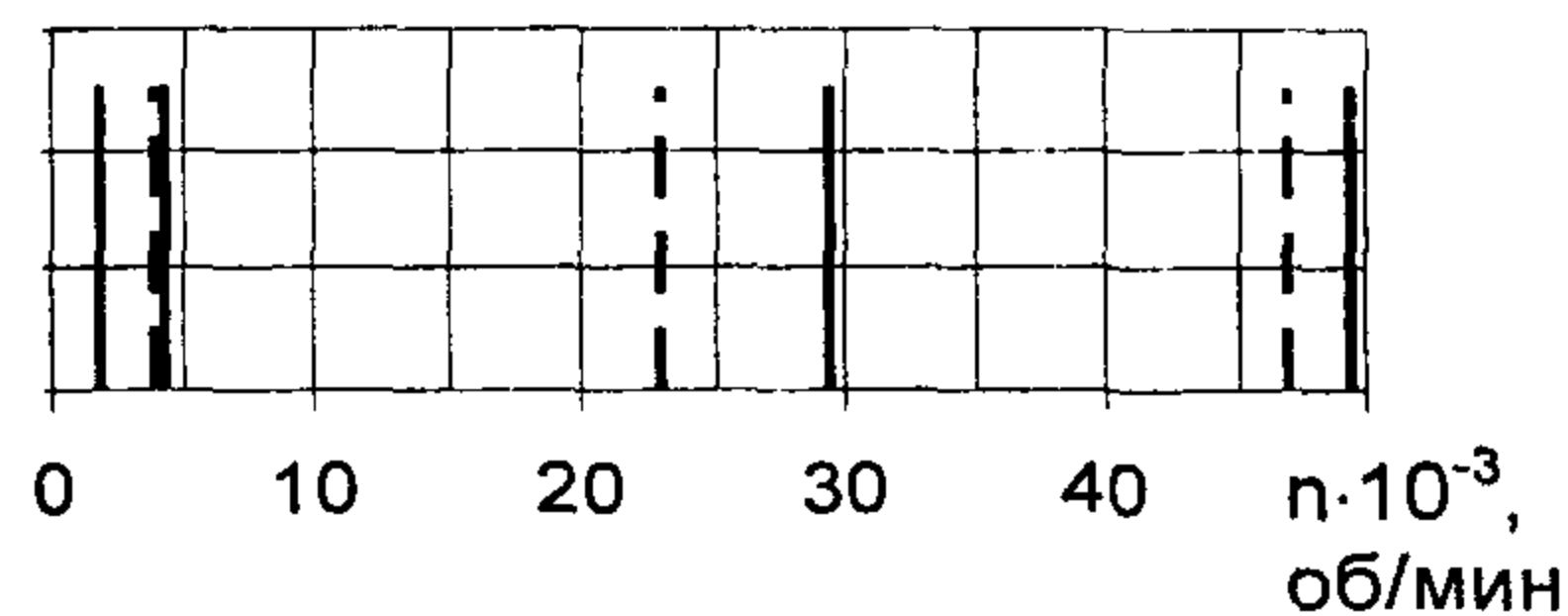


Рис.4. Спектр критических частот вращения прямой (сплошные линии) и обратной (пунктирные линии) прецессии

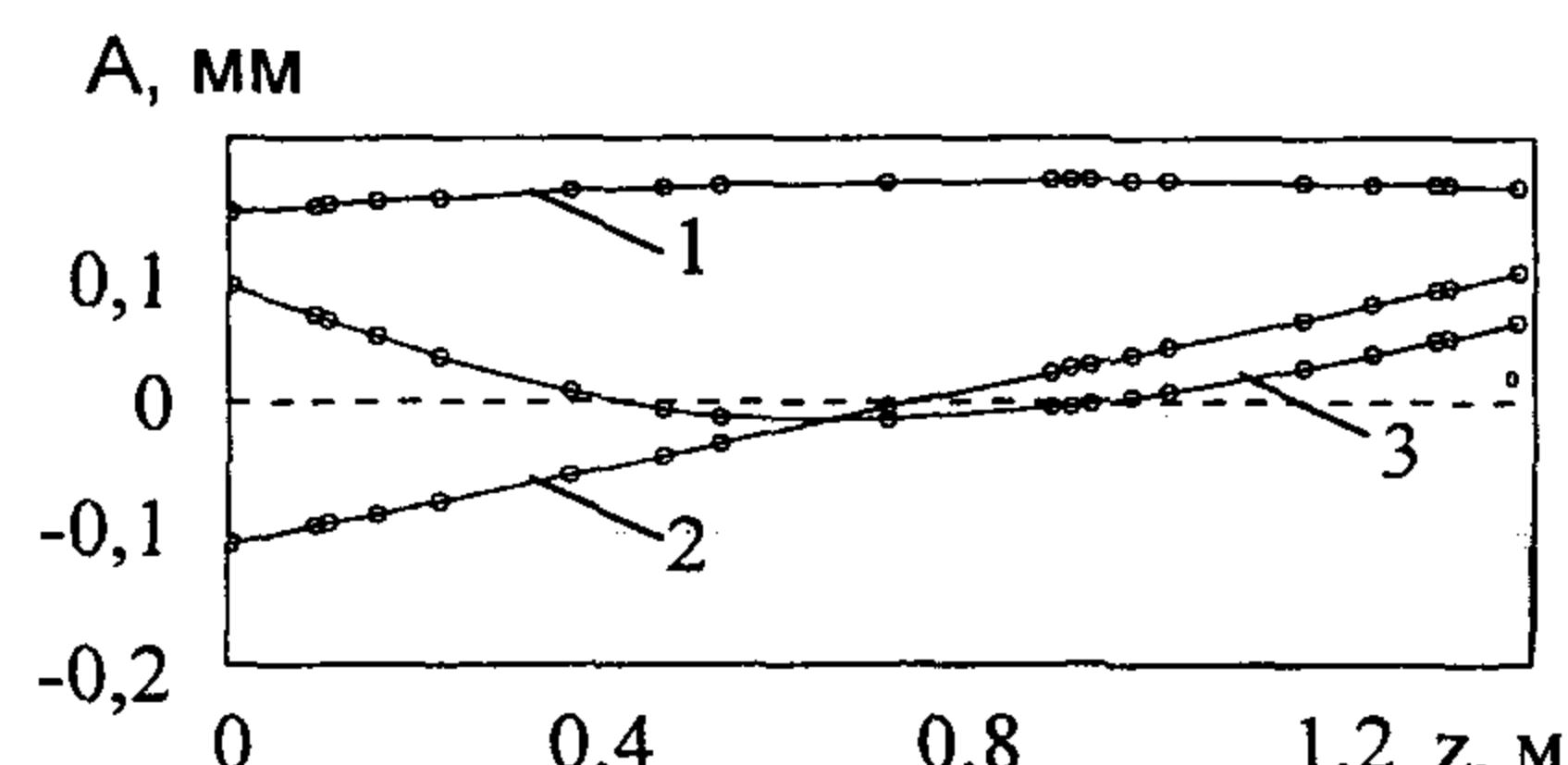


Рис.5. Собственные формы колебаний

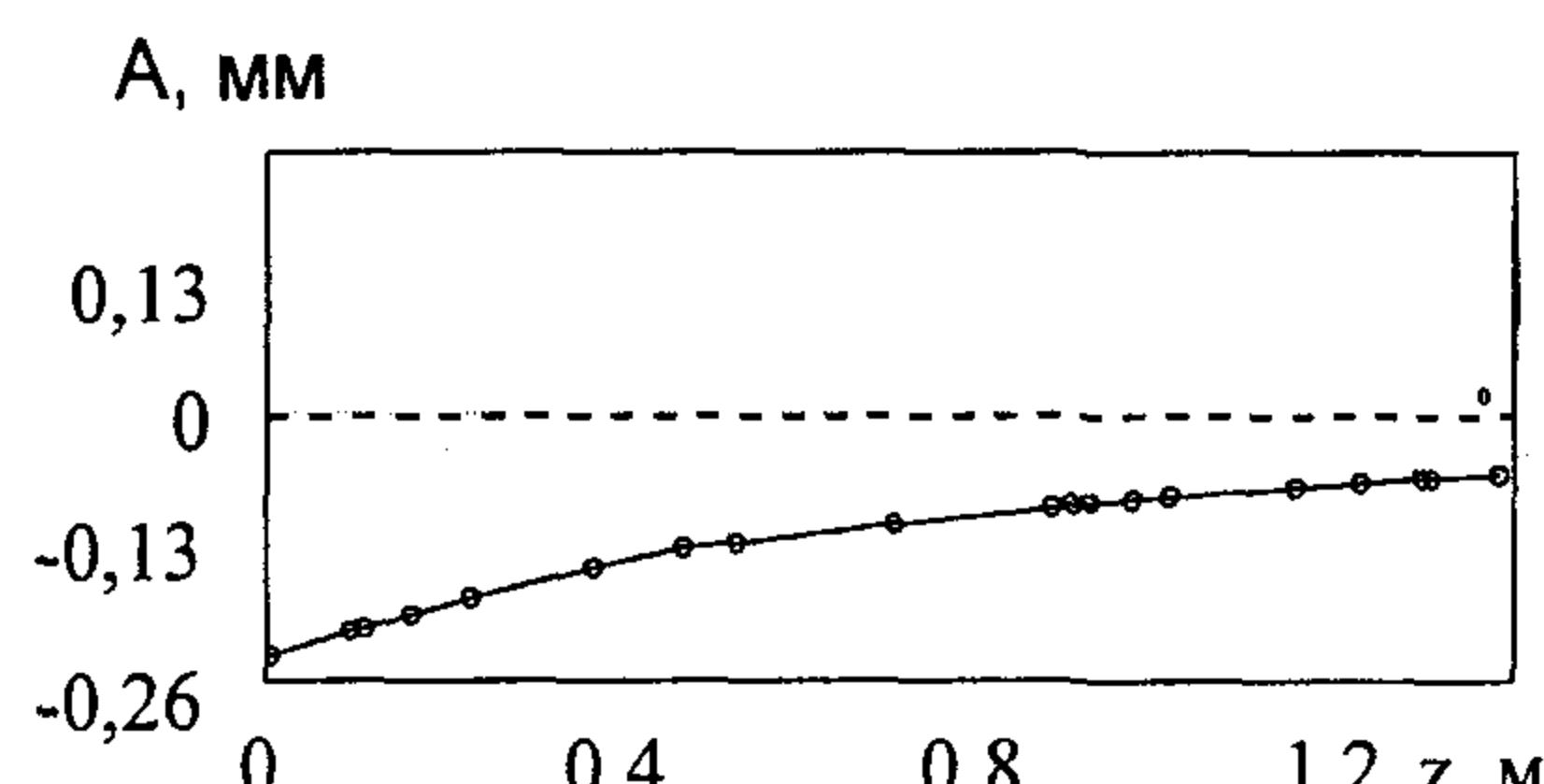
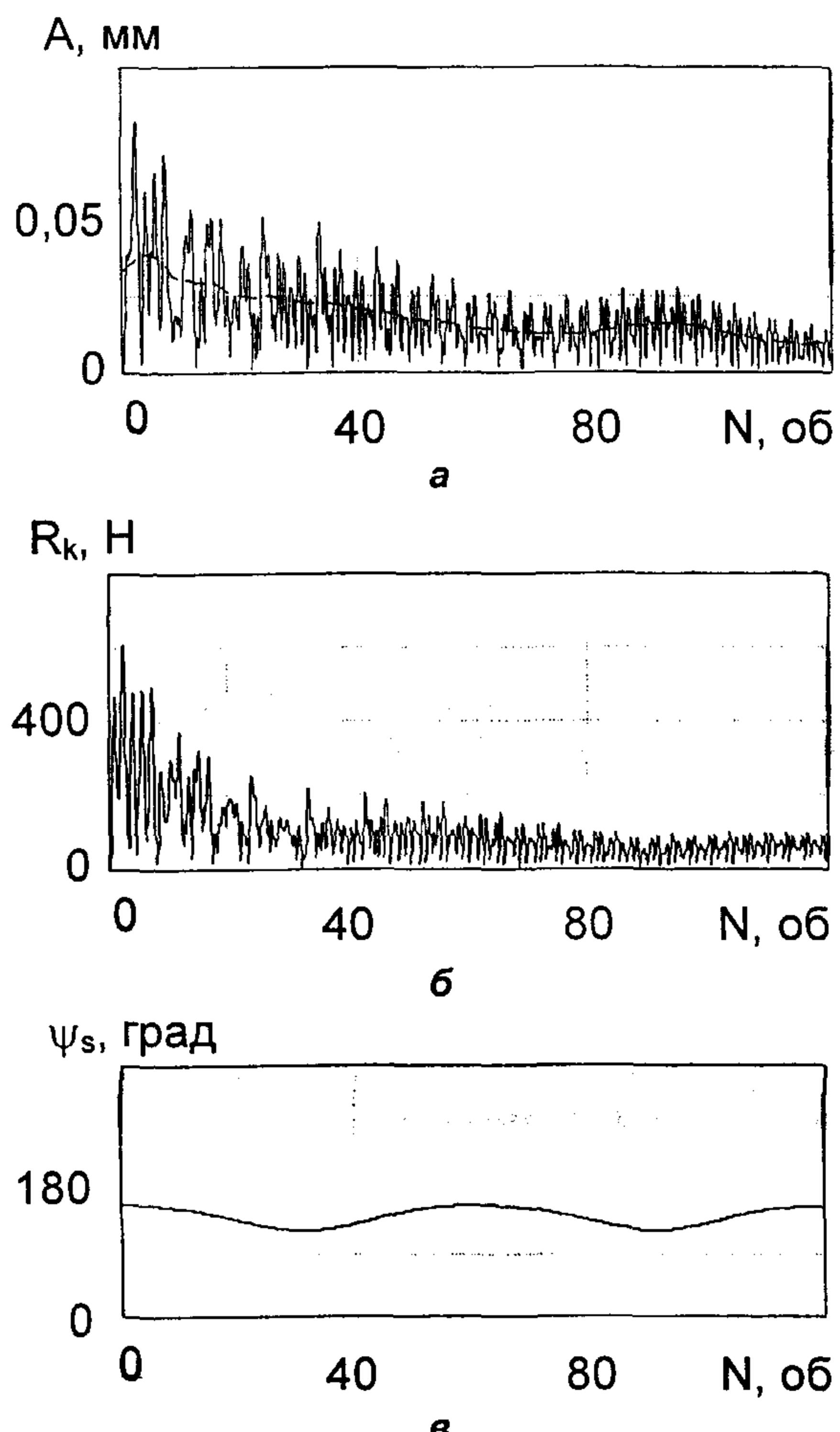


Рис.6. Форма колебаний ротора на рабочей частоте



**Рис.7. Зависимости изменения характеристик переходного процесса ротора с автобалансиром: а – колебания компрессорного колеса; б – амплитуда усилий в левой опоре; в – угловое положение первой КМ в АБУ сечения К**

Рассмотрение конструктивных особенностей ротора выявило, что практическая установка автобалансиров возможна в сечениях: компрессорного колеса (К), турбинного колеса (Т), на левом (Л) и правом (П) торцах вала (см. рисунок 1).

Последующие вариантовые расчеты переходных процессов ротора с АБУ позволили установить, что наиболее эффективная автобалансировка наблюдается при наличии двух АБУ, расположенных в сечениях К и Т. Каждый автобалансир имеет по две КМ, их параметры выбирались исходя из имеющегося дисбаланса ротора и конструктивных соображений. На рисунке 7 а-в показаны

некоторые графики переходных процессов ротора. На графиках процессы показаны в функции от числа оборотов, сделанных ротором. Расчеты показали, что предлагаемый вариант автобалансировки ротора приводит к снижению амплитуды колебаний компрессорного колеса на 90 %, турбинного колеса – на 85 %. Амплитуда нагрузок в левой опоре уменьшается на 93 %, а в правой опоре – на 59 %.

#### 4. Заключение

Таким образом, разработанный метод позволяет эффективно проводить расчетный анализ динамики произвольного ротора с автобалансирующими устройствами с учетом всех значимых конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов. Её применение позволило выработать обоснованные рекомендации по практической установке автобалансиров на конкретном роторе газотурбонагнетателя.

#### Литература

- Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.
- Агафонов Ю.В., Базыкин Ю.В. Исследование устойчивости шарикового автобалансира роторной системы на анизотропных упругих опорах // Машиноведение. - 1985. - № 5. - С. 111-113.
- Артюнин А.И. Исследование движения ротора с автобалансиром. // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1993. - №1. - С. 15 – 19.
- Горбенко А.Н. Об устойчивости автобалансировки ротора с помощью шариков // Пробл. прочности – 2002. – № 3. – С. 120-129.
- Нельсон, Мак-Во. Исследование динамики системы ротор-подшипники методом конечных элементов // Конструирование и технология машиностроения. – 1976. - №2. - С. 223-231.
- Зоржи, Нельсон. Исследование динамики системы ротор-подшипники с учетом осевого момента методом конечных элементов // Там же. – 1980. - №1. - С. 105-109.
- Коженков А.А., Дейч Р.С., Якубович В.И. Численное моделирование динамики роторных систем с подшипниками скольжения // Компрессорная техника и пневматика. – 1997. - № 16-17. - С. 68-72.
- Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.