

А.Н. Горбенко

УДК 62-755

Керченский морской  
технологический  
институт

Керч, Украина

# АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОБАЛАНСИРОВКИ РОТОРА ШАРАМИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ АВТОБАЛАНСИРА

В работе аналитически получено выражение, характеризующее область устойчивости автобалансировки однодискового ротора в общем случае параметров механической системы. Установлен ряд особенностей динамики автобалансира и даны рекомендации по обеспечению устойчивости его работы.

Шариковые автобалансирующие устройства (АБУ) позволяют снижать вибрацию роторных машин непосредственно в процессе их работы. Одной из проблем, затрудняющих эффективное применение АБУ, является сложность подбора таких значений параметров автобалансира, при которых обеспечивалась бы надежная устойчивость его работы. Известно, что для однодисковой роторной машины необходимым (но еще не достаточным) условием устойчивости автобалансировки является работа в закритической области скорости вращения. Именно к такому условию устойчивости приводят элементарные физические рассуждения [1] и аналитические исследования, основанные на методе усреднения [2, 3]. Однако, опыт экспериментальных исследований [1] и численных расчетов [4, 5] показывает, что граница зоны устойчивости  $\omega_u$  может существенно превышать критическую скорость вращения  $r$ . Среди известных работ лишь в [6] аналитически установлено, что зона устойчивости автобалансировки однодискового ротора располагается заметно выше  $r$ . Однако в работе [6] исследован лишь частный случай автобалансира – количество шариков равно двум, а параметры АБУ таковы, что углы  $\alpha_{1,2}$  между шариками и линией дисбаланса составляют  $\pm 0,5 \pi$ ,  $\pm 0,75 \pi$  или  $\pm \pi$  (в стационарном движении системы). В настоящей работе выполнен анализ устойчивости в общем случае параметров автобалансира.

Рассмотрим механическую систему, изображенную на рис.1. На невесомый вал, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , наложен диск массой  $M$  с эксцентризитетом  $r = OC$ . В диске, совершающем плоское движение, имеется круговая канавка или полость, в которую помещено  $n$  шариков массой  $m$  каждый. Радиус окружности, по которой могут перемещаться центры шариков, составляет  $R$ . Демпфирующие свойства системы характеризуются коэффициентом  $\beta$  внешнего вязкого трения ротора и коэффициентом  $\beta_0$  вязкого трения шариков в полости автобалансира, частично или полностью заполненной вязкой жидкостью.

Мгновенное положение диска определяется координатами  $x$ ,  $y$  точки О крепления диска к валу и углом поворота  $\omega t$  линии дисбаланса ОС

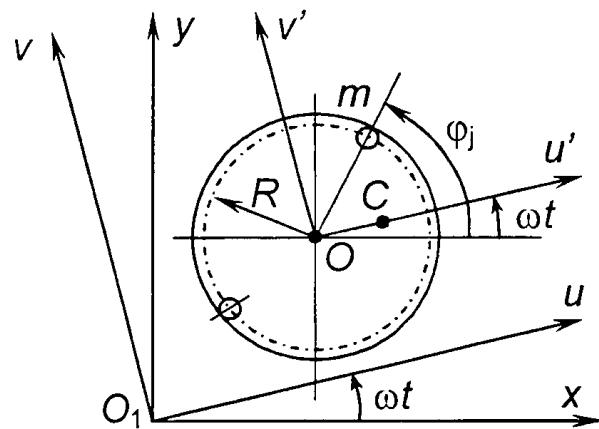


Рис.1. Схема автобалансирующего устройства

относительно оси  $O_1x$ . Положение  $j$ -го шарика определяется угловой координатой  $\varphi_j$ .

Движение механической системы описывается известной системой нелинейных дифференциальных уравнений вида [1-6]

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \beta \dot{x} + p^2 x &= \mu_c r \omega^2 \cos \omega t + \\ &+ \mu r \sum_{j=1}^n (\dot{\phi}_j^2 \cos \varphi_j + \ddot{\phi}_j \sin \varphi_j); \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} + p^2 y &= \mu_c r \omega^2 \sin \omega t + \\ &+ \mu r \sum_{j=1}^n (\dot{\phi}_j^2 \sin \varphi_j - \ddot{\phi}_j \cos \varphi_j); \\ \ddot{\phi}_j + \beta_0 (\dot{\phi}_j - \omega) &= \\ &= \frac{1}{R} \ddot{x} \sin \omega t - \frac{1}{R} \ddot{y} \cos \omega t, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mu_c = M/(M+n m)$ ,  $\mu = m/(M+n m)$ ;

Для того, чтобы в дальнейшем получить автономные уравнения возмущенного движения перейдем от неподвижной координатной системы  $xO_1y$  к системе координат  $uO_1v$ , вращающейся с постоянной скоростью  $\omega$  вокруг точки  $O_1$ . Для этого выполним замену переменных, используя соотношения

$$x = u \cos \omega t - v \sin \omega t;$$

$$y = u \sin \omega t + v \cos \omega t.$$

Тогда уравнения движения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \beta \dot{u} + (p^2 - \omega^2)u - 2\omega \dot{v} - \beta \omega v = \\ = \mu_c r \omega^2 + \mu R \sum_{j=1}^n [\dot{\phi}_j^2 \cos \gamma_j + \ddot{\phi}_j \sin \gamma_j]; \\ \ddot{v} + \beta \dot{v} + (p^2 - \omega^2)v + 2\omega \dot{u} + \beta \omega u = \\ = \mu R \sum_{j=1}^n [\dot{\phi}_j^2 \sin \gamma_j - \ddot{\phi}_j \cos \gamma_j]; \\ \ddot{\phi}_j + \beta_0 (\phi_j - \omega) = \\ = \frac{1}{R} (\ddot{u} - 2\omega \dot{v} - \omega^2 u) \sin \gamma_j - \\ - \frac{1}{R} (\ddot{v} + 2\omega \dot{u} - \omega^2 v) \cos \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\gamma_j = \phi_j - \omega t$ .

Система уравнений (2) допускает стационарное решение, соответствующее режиму автобалансировки ротора:

$$\begin{aligned} u = u_0 = 0; \quad v = v_0 = 0; \\ \phi_j = \varphi_{0j} = \omega t + \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n \sin \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j = -\frac{\mu_c r}{\mu R}. \end{aligned} \quad (3)$$

В режиме автобалансировки шарики вращаются вместе с диском, занимая относительно него неизменные угловые положения  $\alpha_j$ . Причем  $\alpha_j$  такие, что общий центр масс системы совпадает с точкой О, в результате чего поперечные колебания ротора отсутствуют. Кроме того, как следует из (3), для реализации автобалансировки необходимо выполнение условия  $n\mu R \geq \mu_c r$ .

Для анализа устойчивости режима автобалансировки дадим малые отклонения (вариации) обобщенным координатам:

$$u = u_0 + u_1; \quad v = v_0 + v_1; \quad \phi_j = \varphi_{0j} + \phi_j. \quad (4)$$

Далее, подставив (4) в (2) с учетом (3) и пренебрегая слагаемыми второго и более высоких порядков малости, получаем уравнение возмущенного движения в первом приближении:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \beta \dot{u}_1 + (p^2 - \omega^2)u_1 - 2\omega \dot{v}_1 - \beta \omega v_1 = \\ = \mu R \sum_{j=1}^n [2\omega \dot{\phi}_j \cos \alpha_j + (\ddot{\phi}_j - \omega^2 \phi_j) \sin \alpha_j]; \\ \ddot{v}_1 + \beta \dot{v}_1 + (p^2 - \omega^2)v_1 + 2\omega \dot{u}_1 + \beta \omega u_1 = \\ = \mu R \sum_{j=1}^n [2\omega \dot{\phi}_j \sin \alpha_j - (\ddot{\phi}_j - \omega^2 \phi_j) \cos \alpha_j]; \\ \ddot{\phi}_j + \beta_0 \dot{\phi}_j = \frac{1}{R} (\ddot{u}_1 - 2\omega \dot{v}_1 - \omega^2 u_1) \sin \alpha_j - \\ - \frac{1}{R} (\ddot{v}_1 + 2\omega \dot{u}_1 - \omega^2 v_1) \cos \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем искать решения уравнений (5) в форме

$$u_1 = U e^{\lambda t}; \quad v_1 = V e^{\lambda t}; \quad \phi_j = C_j e^{\lambda t}. \quad (6)$$

где  $U, V, C_j$  – постоянные величины.

После подстановки (6) в (5) получаем систему алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + \beta \lambda + p^2 - \omega^2)U - \omega(2\lambda + \beta)V = \\ = \mu R \sum_{j=1}^n C_j [2\omega \lambda \cos \alpha_j + (\lambda^2 - \omega^2) \sin \alpha_j]; \\ (\lambda^2 + \beta \lambda + p^2 - \omega^2)V + \omega(2\lambda + \beta)U = \\ = \mu R \sum_{j=1}^n C_j [2\omega \lambda \sin \alpha_j - (\lambda^2 - \omega^2) \cos \alpha_j]; \\ \lambda(\lambda + \beta_0)C_j = \\ = \frac{1}{R} [(\lambda^2 - \omega^2) \sin \alpha_j - 2\omega \lambda \cos \alpha_j]U - \\ - \frac{1}{R} [2\omega \lambda \sin \alpha_j + (\lambda^2 - \omega^2) \cos \alpha_j]V, \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Количество уравнений в системе (7) составляет  $2 + n$ , т.е. зависит от числа шариков. Соответственно количество слагаемых в характеристическом уравнении, составленном по (7), также будет зависеть от  $n$ . Это обстоятельство существенно затруднит исследование устойчивости системы при произвольном числе шариков. Преодолеть указанную трудность можно, если из уравнения для  $j$ -го шарика выразить  $C_j$  через  $U$  и  $V$  и подставить в первые два уравнения системы (7). Поскольку величины  $U$  и  $V$  одинаковы для всех шариков, то их можно вынести за знак суммирования. Таким образом, после преобразований и приведения к безразмерному виду получаем вместо (7) систему из двух уравнений (независимо от числа шариков) в виде

$$A_1 U - A_2 V = 0; \quad A_3 U - A_4 V = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= L_1 L_6 - \mu(L_4 - L_3 D_C); \\ A_2 &= L_2 L_6 - \mu(L_5 + L_3 D_S); \\ A_3 &= L_2 L_6 - \mu(L_5 - L_3 D_S); \\ A_4 &= L_1 L_6 - \mu(L_4 + L_3 D_C); \\ L_1 &= \Delta^2 + B\Delta + 1 - \Omega^2; \\ L_2 &= (2\Delta + B)\Omega; \quad L_3 = 0,5(\Delta^2 + \Omega^2)^2; \\ L_4 &= 0,5(\Delta^2 - \Omega^2)^2 - 2\Omega^2 \Delta^2; \\ L_5 &= 2\Omega\Delta(\Delta^2 - \Omega^2); \quad L_6 = \Delta^2 + B_0\Delta; \\ D_C &= \sum_{j=1}^n \cos 2\alpha_j; \quad D_S = \sum_{j=1}^n \sin 2\alpha_j; \\ \Delta &= \lambda/p; \quad \Omega = \omega/p; \\ B &= \beta/p; \quad B_0 = \beta_0/p. \end{aligned}$$

Безразмерные параметры  $\mu, B_0$  и  $B$  можно считать малыми. Отсюда характеристическое уравнение можно получить в виде

$$\begin{aligned} & \left(L_1^2 + L_2^2\right)L_6^2 - 2n\mu(L_1L_4 + L_2L_5)L_6 + \\ & + n^2\mu^2(1-D)L_3^2 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $D = (D_C^2 + D_S^2)/n^2$ .

Характеристическое уравнение может быть также представлено в форме полинома восьмого порядка:

$$\begin{aligned} & a_0\Delta^8 + a_1\Delta^7 + a_2\Delta^6 + a_3\Delta^5 + \\ & + a_4\Delta^4 + a_5\Delta^3 + a_6\Delta^2 + a_7\Delta + a_8 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= (1-0,5n\mu)^2 - 0,25n^2\mu^2D; \\ a_1 &= (B+B_0)(2-n\mu); a_2 = (2-n\mu)(1+\Omega^2); \\ a_3 &= 2(B+2B_0)(1+\Omega^2); \\ a_4 &= (\Omega^2-1)^2 + n\mu\Omega^2(6+\Omega^2); \\ a_5 &= 2B_0(\Omega^2-1)^2 + 3n\mu B_0\Omega^4; \\ a_6 &= n\mu\Omega^4(\Omega^2-1); a_7 = n\mu B_0\Omega^4(\Omega^2-1); \\ a_8 &= 0,25n^2\mu^2(1-D)\Omega^8. \end{aligned}$$

Здесь для коэффициентов  $a_2 - a_6$  даны приближенные выражения с учетом малости параметров  $\mu$ ,  $B_0$  и  $B$ .

Известно, что для устойчивости движения необходимым (но еще не достаточно) условием является положительность коэффициентов характеристического полинома (при  $a_0 > 0$ ) [7]. Как следует из (10), это приводит к уже известному условию  $\Omega > 1$ , а также условию  $|D| < 1$ . Последний параметр (характеризующий расположение шариков в АБУ в установившемся движении) может принимать значения в диапазоне  $0 \leq D \leq 1$ . Следовательно, при всех возможных значениях  $D$ , кроме  $D=1$ , необходимо условие устойчивости соблюдается.

В случае  $D = 1$ , как видно из (9) и (10), характеристическое уравнение имеет нулевой корень. Иными словами имеет место особый случай, когда для исследования устойчивости движения не достаточно одних уравнений первого приближения, а необходимо учитывать влияние нелинейных членов. Значение  $D=1$  возможно при следующих вариантах устойчивого расположения шариков в АБУ: 1)  $\alpha_j = \pm\pi$ ; 2)  $\alpha_j = \pm 0,5\pi$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Первый вариант физически нереализуем, поскольку шарики должны наложиться друг на друга. Во втором варианте шарики поровну распределяются на концах диаметра, перпендикулярного линии дисбаланса диска. Это возможно либо при нулевом эксцентриките диска ( $r = 0$ ), либо при бесконечно большой массе шариков ( $\mu = \infty$ ), что также нереально. Существуют также иные варианты расположения шариков, при которых  $D = 1$ , но эти варианты заведомо неустойчивы [2]. В связи с указанным, в дальнейшем полагаем, что  $D \neq 1$ .

Получим приближенные выражения для корней характеристического уравнения. Для этого, положив сначала малый параметр  $\mu$  равным нулю,

из (9) имеем  $(L_1^2 + L_2^2)L_6^2 = 0$ , откуда с учетом малости параметра  $B$  получаем:  $\Delta_{1,2} = 0$ ;  $\Delta_{3,4} = -B_0$ ;  $\Delta_{5,8} = -0,5B \pm (2 \pm 1)$ .

Далее уточним близкие к нулю корни  $\Delta_{1,4}$  (что следует из равенства  $L_6^2 = 0$ ) методом последовательных приближений. Для этого предварительно уточним значение величины  $L_6$ . Будем рассматривать уравнение (9) как неявным образом заданную функцию  $L_6 = f(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5)$ . Тогда, подставляя в правую часть начальное приближение корня, в качестве которого возьмем  $\Delta^{(0)} = 0$ , получим

$$L_6 = -0,5n\mu(1 \pm \sqrt{D}) \frac{\Omega^4}{\Omega^2 - 1}.$$

Отсюда, используя выражения для  $L_6$  из (8), с учетом малости параметра  $B_0$  можно найти уточненную формулу для  $\Delta_{1,4}$ .

Таким образом, приближенные выражения для корней характеристического уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{1-4} &= -\frac{1}{2}B_0 \pm i\sqrt{\frac{1}{2}n\mu(1 \pm \sqrt{D})} \frac{\Omega^4}{\Omega^2 - 1}; \\ \Delta_{5-8} &= -\frac{1}{2}B \pm i(\Omega \pm 1). \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что существует много способов получения приближенных выражений для корней, дающих несколько различающиеся результаты. Здесь даны выражения, наилучшим образом соответствующие результатам численного исследования характеристического уравнения.

Выражения (11) позволяют сделать некоторые заключения об особенностях частотного спектра колебаний в возмущенном движении в режиме автобалансировки. Независимо от числа шариков в АБУ ( $n \geq 2$ ) количество частот, с которыми происходят колебания в механической системе, ограниченно: не более четырех, если рассматривать движение во вращающейся системе координат, и не более пяти, если рассматривать абсолютное движение. При переходе от вращающейся системы координат к неподвижной системе частоты колебаний  $\text{Im}(\Delta_{1,4})$  переходят в  $\Omega \pm \text{Im}(\Delta_{1,4})$ , а частоты  $\text{Im}(\Delta_{5-8})$  – в собственную частоту ротора. Часть частотного спектра ( $\text{Im}(\Delta_{5-8})$ ) соответствует собственной частоте ротора, а другая часть ( $\text{Im}(\Delta_{1,4})$ ) – собственным частотам колебаний шариков относительно диска. Причем величина последних на 1-2 порядка ниже величины первых. Характерно, что в частотном спектре отсутствует частота вращения ротора, что является следствием эффекта автобалансировки. При учете нелинейных свойств АБУ в его спектре будут присутствовать кратные частоты.

Вернемся к анализу области устойчивости автобалансировки. Характеристическое уравнение имеет восьмой порядок, что делает невозможным применение условий Гурвица и других методов (например, D-разбиение) для аналитического определения границ устойчивости. Полученные приближенные зависимости (11) также не позволяют

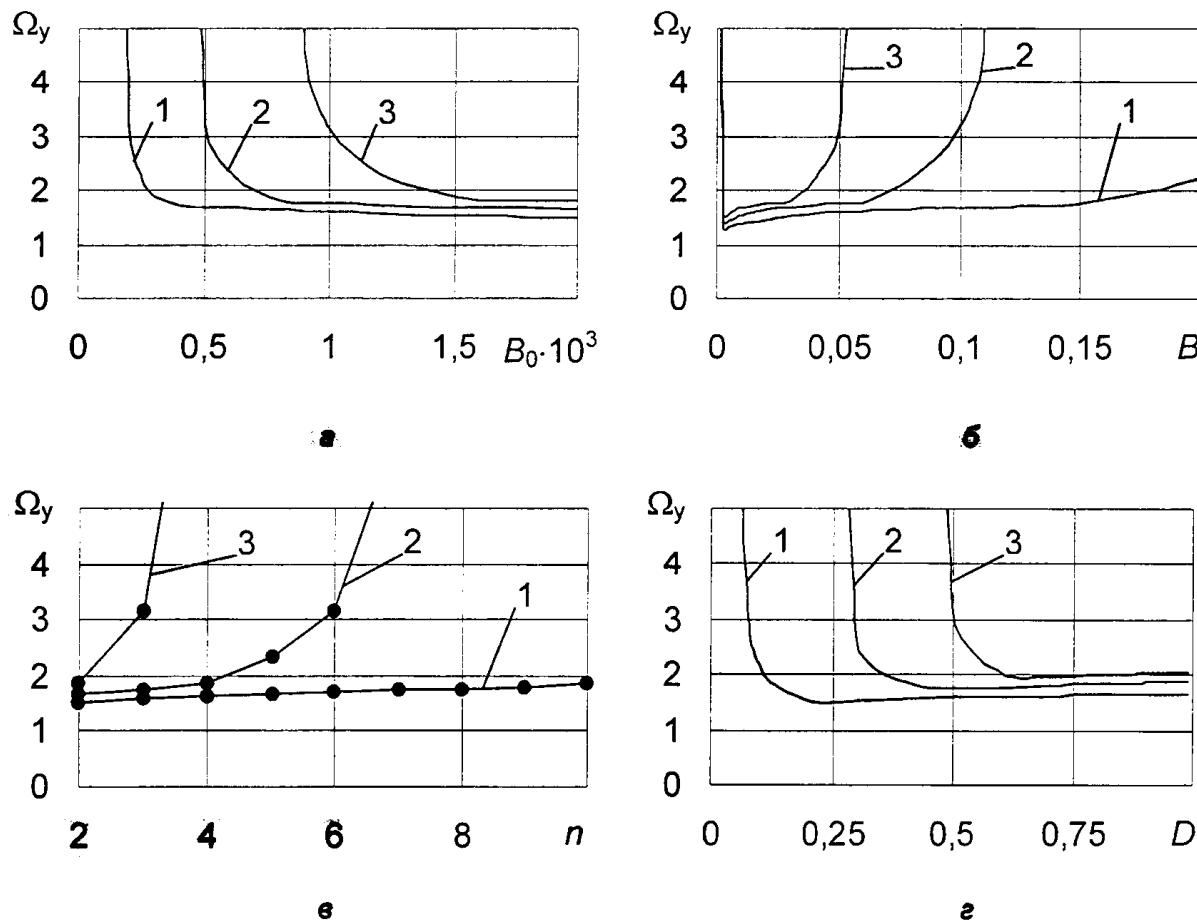


Рис.2. Зависимость границы устойчивости автобалансировки от параметров механической системы: а) при  $B=0,05$ ,  $n=3$ ,  $D=0,5$ ; б) при  $B_0=0,001$ ,  $n=3$ ,  $D=0,5$ ; в) при  $B_0=0,001$ ,  $B=0,05$   $D=0,5$ ; г) при  $B_0=0,001$ ,  $B=0,05$   $n=3$ ; кривые: 1 -  $\mu=0,002$ ; 2 -  $\mu=0,005$ ; 3 -  $\mu=0,01$

это сделать. В связи с этим будем использовать прямой численный анализ вещественных вещественных корней характеристического уравнения в форме (9) в некотором пространстве значений безразмерных параметров механической системы. Диапазоны значений варьируемых безразмерных параметров приняты следующие:  $n = 2 \dots 10$ ,  $D = 0 \dots 1$ ,  $\mu = 0,002 \dots 0,01$ ,  $B = 0,01 \dots 0,2$ ,  $B_0 = 0,0002 \dots 0,002$ . Значения параметра  $B$  соответствуют условиям естественного внешнего демпфирования ротора [8]. Диапазон значений  $B_0$  выбирался с использованием зависимости  $B_0 = 3\pi d\eta / (mp)$ , полученной на основе того, что сила вязкого трения при движении шарика в жидкости составляет  $F_s = 3\pi d\eta v_s$ , где  $d$  - диаметр шарика;  $\eta$  - динамическая вязкость жидкости;  $v_s$  - скорость движения шарика относительно жидкости.

Численный анализ показывает, что при неизменных значениях параметров механической системы устойчивость автобалансировки может быть обеспечена лишь при условии, что скорость вращения ротора достаточно велика:  $\Omega > \Omega_y$ , где  $\Omega_y$  - граница зоны устойчивости, превышающая собственную частоту  $\Omega = 1$ . И обратное – при заданной скорости вращения (сколь высока она бы не была) всегда существует сочетание параметров, при котором режим автобалансировки теряет устойчивость. Минимально возможное значение границы устойчивости приближенно составляет

$$\Omega_{y\min} = 1,15 \dots 1,20.$$

На рис.2 показано влияние параметров ротора и АБУ на границу устойчивости автобалансировки. Как видно из рис.2 а, б демпфирование в механической системе оказывает неоднозначное влияние на границу устойчивости. С одной стороны, увеличение демпфирования шариков  $B_0$  расширяет область устойчивости, т.е. снижает  $\Omega_y$ . С другой стороны, увеличение внешнего демпфирования ротора  $B$  наоборот повышает  $\Omega_y$ , что является нехарактерным с точки зрения общих закономерностей колебаний механических систем. Последняя особенность, по-видимому, объясняется следующим. В случае малого демпфирования  $B$  почти сразу за критической скоростью вращения  $\Omega > 1$  устанавливается сдвиг фаз между возмущающей силой и перемещением диска близкий к  $\pi$ . При этом наиболее удаленным от оси вращения оказывается «легкое» место диска, куда и устремляются шарики в автобалансире, что собственно и обеспечивает возможность проявления эффекта автобалансировки. При увеличении  $B$  сдвиг фаз уменьшается, что может привести к потере устойчивости автобалансировки. Заметим также, что, как установлено в [9], внешнее демпфирование ротора абсолютно не влияет на положения шариков  $\alpha_i$  относительно АБУ в установившемся движении поскольку при автобалансировке отсутствуют поперечные колебания ротора, а значит и силы трения. В этой же работе, однако, сделан вывод о независимости и условий

устойчивости от параметра  $B$ , что не соответствует полученному выше результату. Причиной этого является то, что в [9] в ходе анализа устойчивости использовалось осреднение части дифференциальных уравнений движения.

При отсутствии демпфирования шариков ( $B_0 = 0$ ) или ротора ( $B = 0$ ) устойчивость автобалансировки не может быть обеспечена ни при каких значениях параметров и скорости вращения (см. рис.2 а,б).

Как следует из рис.2 с ростом безразмерной массы шарика  $\mu$  возрастает граница области устойчивости  $\Omega_y$ . Аналогичным образом влияет и число шариков  $n$  (рис.2 в). Однако при этом необходимо иметь в виду, что при достаточно большом  $n$  демпфирование шариков будет заметно возрастать вследствие трения между ними, что способствует снижению  $\Omega_y$ .

Расположение шариков  $\alpha_i$  в автобалансируемом состоянии может существенно влиять на границу устойчивости, что видно на рис.2 г. При приближении  $D$  к нулю величина  $\Omega_y$  резко возрастает до больших, хотя и конечных значений. Заметим, что, например, в случае двухшарикового автобалансира равенство  $D = 0$  реализуется при  $\alpha_{1,2} = \pm 0,75\pi$  и соответственно емкости АБУ  $E = n\mu R/(m_c l)^{2/5}$ . А равенство  $D = 1$  - при  $\alpha_{1,2} = \pm\pi$  или  $\alpha_{1,2} = \pm 0,5\pi$  и емкости АБУ  $E = 1$  или  $E = \infty$ , соответственно. Причем в первом случае относительная масса шарика  $\mu$  значительно меньше, что предпочтительнее.

Таким образом, выполненный в работе анализ области устойчивости автобалансировки однодискового ротора показал, что ее нижняя граница  $\Omega_y$  всегда лежит выше критической скорости вращения ротора. Полученные результаты (характеристическое уравнение в форме (9) или (10), а также графики на рис. 2) позволяют количественно оценивать значение граничной скорости  $\Omega_y$ , на которое оказывают нетривиальное влияние все основные параметры механической системы. Для обеспече-

ния устойчивости автобалансировки можно рекомендовать следующее: увеличение демпфирования шариков  $B_0$ ; снижение демпфирования ротора  $B$  до некоторой достаточно малой величины; уменьшение относительной массы шарика  $\mu$  до минимально необходимого уровня, при котором емкость АБУ несколько больше единицы.

## Литература

1. Автоматическая балансировка роторов машин / А.А.Гусаров, В.И.Сусанин, Л.Н.Шаталов, Б.М.Грушин. - М.: Наука, 1979. – 151 с.
2. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. - М.: Наука, 1981. – 352 с.
3. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84с.
4. Артюнин А.И. Исследование движения ротора с автобалансиром. // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1993. - №1. - с. 15 – 19.
5. Горбенко А.Н., Радченко О.П. Определение границ устойчивости процесса автобалансировки ротора шарами путем численного решения уравнений движения // Механика и машиностроение. – 2000. - №1. – с. 123-127.
6. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки. // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. - 1959. - №4. – с. 38-45.
7. Меркин Д.В. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
8. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. – М.: Наука, 1982. – 280 с.
9. Нестеренко В.П. Учет вязкого сопротивления при определении условий автоматической балансировки // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1989. - №4. - с. 39 – 41.