

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ШАРИКОВ В АВТОБАЛАНСИРУЮЩЕМ УСТРОЙСТВЕ РОТОРА

В работе анализируется поведение шариков в автобалансирующем устройстве, установленном на однодисковый неуравновешенный ротор. Получены и проанализированы уравнения собственных частот колебаний шариков. Показано наличие в механической системе дополнительных резонансов, что сужает область существования эффективной автобалансировки ротора.

Среди способов снижения вибрации машин роторного типа находят применение шариковые автобалансирующие устройства (АБУ). При определенных условиях они автоматически уравновешивают ротор, устранивая тем самым возникновение радиальной центртробежной силы от дисбаланса и снижая вибрацию машины. Подобные устройства являются нелинейной механической системой с нетривиальными свойствами, что определяет трудности ее исследования. Известен ряд работ [1-5], посвященных их теоретическому анализу. Данная работа направлена на дальнейшее углубление знаний о динамических свойствах ротора с АБУ в части частот колебаний элементов системы.

Рассмотрим однодисковый изотропный ротор, врачающийся с постоянной угловой скоростью ω (рис.1). Центр масс диска C отстоит от точки O крепления диска к валу на расстояние $r=OC$, что определяет неуравновешенность ротора. В диске массой M имеется цилиндрическая полость или кольцевая канавка, ось которой проходит через точку O . В эту полость помещено n шариков массой m каждый. Шарики имеют возможность свободно перемещаться по этой канавке по окружности радиуса R . Трениями ротора и шариков в полости АБУ пренебрегаем, поскольку они слабо влияют на частоты колебаний шариков и ротора в целом. Текущее положение диска будем характеризовать координатами x, y точки O , а угловое положение j -го шарика – углом φ_j , отсчитываемым от неподвижной оси x . Движение рассматриваемой механической системы описывается уравнениями [1-4]

$$\ddot{z} + p^2 z = \bar{M} r \omega^2 e^{i\omega t} + \bar{m} R \sum_{j=1}^n (\dot{\varphi}_j^2 - i \ddot{\varphi}_j) \cdot e^{i\varphi_j}, \quad (1)$$

$$R \ddot{\varphi}_j = \ddot{x} \sin \varphi_j - \ddot{y} \cos \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

где

$$z = x + iy; \quad i = \sqrt{-1}; \quad p^2 = K / (M + nm); \quad \bar{M} = M / (M + nm); \quad \bar{m} = m / (M + nm).$$

Здесь для краткости записи использованы функции комплексного переменного.

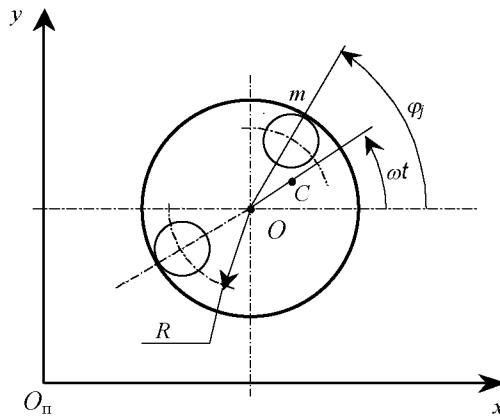


Рис.1. Автобалансирующее устройство

Общее движение механической системы можно представить в виде суммы двух движений:

$$z = z_0 + z_1; \quad \varphi_j = \varphi_{0j} + \phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь z_0 и φ_{0j} описывают стационарное (основное) движение, при котором ротор вращается с постоянным прогибом, а шарики неподвижны относительно его диска. Функции z_1 и ϕ_j описывают малое нестационарное движение системы (переходный процесс), обусловленное некоторым возмущением. После исчезновения этого возмущения механическая система совершает малые колебания относительно основного движения.

Стационарное движение АБУ известно и описывается уравнениями [1-5]

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{R\omega^2}{p^2 - \omega^2} \left(\bar{M}\bar{r} + \bar{m} \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j \right) e^{i\omega t}; \\ \varphi_{0j} &= \omega t + \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{r} = r/R$; α_j - угловое положение j -го шарика относительно линии дисбаланса диска.

Как известно, необходимым (но не всегда достаточным) условием эффективного функционирования АБУ является работа в закритической области, когда $\omega > p$. В связи с этим дальнейший анализ будем выполнять именно для этого диапазона ω . При этом шарики занимают такое положение в полости АБУ, при котором отсутствует прогиб вала, т.е. имеет место автобалансировка ротора:

$$z_0 \equiv 0; \quad \sum_{j=1}^n \cos \alpha_j = -\frac{n}{E}; \quad \sum_{j=1}^n \sin \alpha_j = 0, \quad (5)$$

где $E=nmR/(Mr)$ - относительная емкость АБУ, показывающая во сколько раз максимальный дисбаланс шариков превосходит имеющийся дисбаланс ротора.

Подставив (3) в (1) и (2) с учетом (5) и малости функций z_1 и ϕ_j , получаем систему дифференциальных уравнений нестационарного движения системы в виде

$$\ddot{z}_1 + p^2 z_1 = \bar{m}R \sum_{j=1}^n [2\omega \dot{\phi}_j + i(\omega^2 \phi_j - \ddot{\phi}_j)] e^{i(\omega t + \alpha_j)}; \quad (6)$$

$$R \ddot{\phi}_j = \ddot{x}_1 \sin(\omega t + \alpha_j) - \ddot{y}_1 \cos(\omega t + \alpha_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Прежде чем отыскивать решение этой системы уравнений выясним физическую природу движения шариков. При установившемся стационарном движении системы шарики вращаются вместе с диском, занимая по отношению к нему некоторое неизменное положение. При этом отсутствуют силы, стремящиеся вывести шарик из этого положения динамического равновесия. Колебания шариков относительно диска могут быть вызваны лишь возмущением в стационарном движении АБУ (колебания частоты вращения, случайные внешние силы, воздействие рабочего тела машины и т.д.). Когда шарик выведен из положения равновесия, на него начинает действовать неуравновешенная восстанавливающая сила. Таким образом, колебания шариков относительно диска при их совместном вращении носят характер свободных колебаний маятника, находящегося в центральном поле сил, несмотря на то, что движение ротора является вынужденным. Амплитуда этих колебаний зависит от степени начального возмущения. Известно, что частота собственных колебаний маятника длиной R_M с точкой подвеса, вращающейся по окружности радиуса r_M , равна $p_M = \sqrt{r_M/R_M}$. При характерном для АБУ соотношении $r_M \ll R_M$ имеем $p_M \ll \omega$. Следовательно, можно предположить, что шарики в АБУ совершают относительно диска медленные колебания (по сравнению с частотой вращения ротора). Эта особенность подтверждается и экспериментальными исследованиями [5,6]. Так, в [5, с.74] отмечается, что скорость относительного перемещения шариков в 10...15 раз меньше ω .

С учетом сказанного физически обоснованно принять допущение о том, что функция ϕ_j не только малая, но медленная. Тогда, считая в (6) выражение в квадратных скобках приблизительно постоянным, получаем первое приближение уравнений нестационарного движения ротора:

$$z_1 = \frac{\bar{m}R}{p^2 - \omega^2} \sum_{j=1}^n [2\omega \dot{\phi}_j + i(\omega^2 \phi_j - \ddot{\phi}_j)] e^{i(\omega t + \alpha_j)} \quad (8)$$

или, переходя к обычной форме записи, имеем:

$$x_1 = \frac{\bar{m}R}{p^2 - \omega^2} [A \cos \omega t - B \sin \omega t]; \quad y_1 = \frac{\bar{m}R}{p^2 - \omega^2} [B \cos \omega t + A \sin \omega t], \quad (9)$$

где

$$A = \sum_{j=1}^n [2\omega \dot{\phi}_j \cos \alpha_j - (\omega^2 \phi_j - \ddot{\phi}_j) \sin \alpha_j]; \quad B = \sum_{j=1}^n [2\omega \dot{\phi}_j \sin \alpha_j + (\omega^2 \phi_j - \ddot{\phi}_j) \cos \alpha_j].$$

Подставив (9) в (7), после преобразований получаем дифференциальное уравнение движения k -го шарика в виде

$$\ddot{\phi}_k = \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2} \bar{m} [B \cos \alpha_k - A \sin \alpha_k], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Как видим, здесь "быстрое время" ωt сократилось.

Далее рассмотрим частный случай двухшарикового АБУ, чаще всего используемого на практике. В этом случае, как следует из (10), движение шариков описывается системой из двух линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} K_0 \ddot{\phi}_1 + K_1 \phi_1 + K_2 \ddot{\phi}_2 - K_3 \dot{\phi}_2 + K_4 \phi_2 &= 0; \\ K_0 \ddot{\phi}_2 + K_1 \phi_2 + K_2 \ddot{\phi}_1 + K_3 \dot{\phi}_1 + K_4 \phi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{F}{\bar{m}} - 1; \quad K_1 = \omega^2; \quad K_2 = 1 - \frac{2}{E^2}; \quad K_3 = -\frac{4\omega}{E} \sqrt{1 - \frac{1}{E^2}}; \\ K_4 &= -\omega^2 K_2; \quad F = \frac{\omega^2 - p^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

При выводе (11) использовалось свойство $\alpha_1 = -\alpha_2$.

Подставив в (12) решения вида

$$\phi_1 = C_1 e^{\lambda t}; \quad \phi_2 = C_2 e^{\lambda t}, \quad (12)$$

где C_1, C_2 - постоянные коэффициенты, получаем характеристическое уравнение в виде биквадратного уравнения:

$$a \lambda^4 + b \lambda^2 + g = 0, \quad (13)$$

где

$$a = \frac{F^2}{\bar{m}^2} - 2 \frac{F}{\bar{m}} + 4c; \quad b = 2\omega^2 \left(\frac{F}{\bar{m}} + 4c \right); \quad g = 4\omega^4 c; \quad c = E^{-2} + E^{-4}.$$

Для устойчивости движения шариков необходимо, чтобы корни (13) были чисто мнимыми, т.е. вида $\lambda_{1,2,3,4} = \pm i p_{1,2}$. Это обеспечивается лишь в том случае, если определитель $D = b^2 - 4ag$ положителен и коэффициенты a, b, g одного знака. Анализ показывает, что условие устойчивости невозмущенного движения шариков для случая достаточной емкости АБУ ($E > 1$) в зарезонансной области ($\omega > p$) сводится к неравенству:

$$\omega^2 > \frac{1}{1 - \bar{m} \left(1 + \left| 1 - \frac{2}{E^2} \right| \right)} \cdot p^2 \quad (14)$$

Условие (14) несколько уточняет известное условие устойчивости АБУ [1-4]. При значениях относительной массы шарика \bar{m} , характерных для существующих АБУ ($\bar{m} \ll 1$), граничная скорость области устойчивости в (14) лишь немногим превосходит критическую скорость вращения p (на 0,1...1%).

Таким образом, как следует из (11), в пределах области устойчивости шарики совершают относительно диска свободные колебания, состоящие из двух гармоник с частотами p_1 и p_2 :

$$\phi_j = C_j \cos(p_1 t + \beta_j) + D_j \cos(p_2 t + \gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

где $C_j, \beta_j, D_j, \gamma_j$ - постоянные величины, зависящие от степени возмущения системы.

Частоты собственных колебаний шариков определяются выражением (см. формулу (13))

$$p_{1,2}^2 = \frac{F + 4c\bar{m} \pm \sqrt{(1-4c)F^2 + 16c\bar{m}F}}{F^2 - 2F\bar{m} + 4c\bar{m}^2} \cdot \bar{m}\omega^2, \quad (16)$$

которое, учитывая малость параметра \bar{m} , можно преобразовать к приближенной, но более наглядной формуле

$$p_{1,2}^2 = \left[1 \pm \left(1 - \frac{2}{E^2} \right) \right] \bar{m} \frac{\omega^4}{\omega^2 - p^2}, \quad (17)$$

На рис.2 показаны зависимости $p_{1,2}$ от ω при различных значениях параметров АБУ: кривые 1 - $\bar{m} = 0,0025$, $E=1,5$; кривые 2 - $\bar{m} = 0,0075$, $E=1,5$; кривые 3 - $\bar{m} = 0,0025$, $E=2$. Как видно из рис.2 и последних формул, частоты собственных колебаний шариков зависят не только от конструкции АБУ и ротора (m, R, M, r), но и от его скорости вращения, т.е. от режима работы машины. Зависимость носит нетривиальный характер: сразу за критической скоростью p функция $p_{1,2}(\omega)$ резко падает до минимального значения при $\omega/p \approx \sqrt{2}$ (как следует из (17)), а затем наблюдается ее практически линейный рост. Коэффициент пропорциональности $p_{1,2}/\omega$ весьма мал, что подтверждает принятое выше допущение об относительной медленности движений шариков в полости АБУ.

Частоты собственных колебаний шариков (а значит и переходные процессы в системе) существенно зависят от параметров АБУ. Так увеличение относительной массы шариков \bar{m} (при неизменной E) приводит к росту собственных частот $p_{1,2}$, а увеличение емкости устройства E (при неизменной \bar{m}) влечет за собой возрастание разности $|p_1 - p_2|$ при приблизительно том же среднем значении.

Отметим также следующие свойства, вытекающие из (17):

- 1) при емкости $E = \sqrt{2}$ обе собственные частоты $p_{1,2}$ совпадают друг с другом;
- 2) при емкости $E = 1$ или ∞ одна из собственных частот обращается в нуль;
- 3) собственные частоты могут отличаться друг от друга не более, чем в два раза (при условии $E \geq 1$).

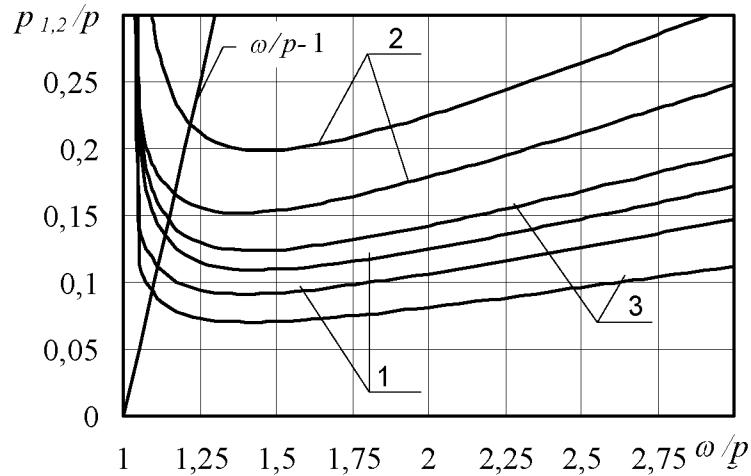


Рис. 2. Зависимости собственных частот шариков АБУ от скорости вращения ротора

В случае близости значений p_1 и p_2 (что зачастую имеет место) движение шариков (15) носит характер "биения колебаний".

Уравнения (8) и (15) описывают нестационарное движение ротора и шариков в первом приближении. Для получения второго приближения необходимо подставить (15) в (6) и решить его уже не считая функцию $\phi_j(t)$ медленной. Тогда получим уравнение следующего типа:

$$z_1 = \sum_{v=1}^4 H_v \frac{(\omega \pm p_{1,2})^2}{p^2 - (\omega \pm p_{1,2})^2} e^{i(\omega \pm p_{1,2})t}, \quad (18)$$

где H_v - коэффициенты.

Отсюда видно, что в нелинейной механической системе ротор – шарики помимо основного резонанса существует четыре дополнительных – при критических скоростях вращения $\omega_k = p \pm p_{1,2}$. На рис.2 эти дополнительные критические скорости соответствуют точкам пересечений представленных кривых с прямой $\omega / p - 1$. Очевидно, что при определенных значениях параметров дополнительные критические скорости ω_k могут заметно

отличаться от p и сужать область действительной устойчивости автобалансировки ротора. Традиционный анализ устойчивости АБУ, в том числе и приведенный выше (см. формулы (11) – (14)), не выявляет наличие дополнительных резонансов вследствие недостаточно полного учета сложного взаимовлияния колебаний ротора и шариков.

Таким образом, в данной работе получены расчетные формулы для собственных частот колебаний шариков АБУ и выполнен анализ их зависимости от различных факторов. Установлено наличие дополнительных резонансов в системе, обусловленные самоизвестждением шариков. Полученные результаты способствуют более глубокому пониманию динамики АБУ и обоснованному выбору его параметров.

Литература

1. Агафонов Ю.В. Исследование устойчивости шарикового автобалансира роторной системы на упругих опорах // Машиноведение, 1976, №6, с.3-7.
2. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. - М: Наука, 1981. - 352 с.
3. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы автобалансира для динамической балансировки // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, №4, с. 38-45.
4. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84с.
5. Рейбах Ю.С. Устройства для балансировки шлифовальных кругов. - М: НИИМАШ, 1967. - 84 с.
6. Рейбах Ю.С., Ривкин А.И. Балансировка шлифовального круга шарами на выбеге шпинделя // Станки и инструмент, 1967, №7, с.13-16.

Библиографическое описание статьи:

Горбенко А.Н. О собственных колебаниях шариков в автобалансирующем устройстве ротора // Проблемы машиностроения, 2000, № 1-2 – с. 86-90.