

ВЛИЯНИЕ МАССЫ ШАРОВ АВТОБАЛАНСИРА НА СТРУКТУРУ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХОПОРНОГО РОТОРА

© Филимонихин Г.Б., Горбенко А.Н., 2011

Визначається вплив невеличкості маси куль і дисбалансу на структуру диференціальних рівнянь руху жорсткого ротора на двох пружно-в'язких опорах з кульовим автобалансиром.

The influence of no smallness of mass of the balls and unbalance on the structure of the differential equations of motion of rigid rotor on two viscid-elastic supports with a ball-type auto-balancer is determined in the paper.

Вступление. Пассивные автобалансиры (АБ) находят применение для снижения уровня вибраций в роторных машинах (РМ). Динамика таких устройств описывается большим числом существенно нелинейных дифференциальных уравнений с нетривиальными свойствами, что вызывает значительные трудности их аналитического исследования.

Постановка проблемы. Традиционно в существующих работах по теории автобалансировки в явном или неявном виде используется допущение о малости масс корректирующих грузов (КГ) и дисбалансной массы (ДМ) по сравнению с массой ротора, что позволяет упростить математическую модель и использовать для ее приближенного решения один из методов малого параметра. Такой подход может оказаться неприменимым в случае уравнивания АБ роторов экстракторов, центрифуг, сепараторов, поскольку в них масса дисбаланса и АБ сопоставима с массой ротора. Поэтому представляет интерес установить качественное влияние величины масс КГ и ДМ на динамическое поведение ротора с АБ.

Обзор литературных источников. Впервые аналитическая теория уравнивания двухшаровыми АБ жестких роторов на податливых опорах, совершающих плоскопараллельное движение, движение вокруг неподвижной точки, пространственное движение была изложена в работе [1]. В работе в предположении малости массы шаров по отношению к массе ротора приближенно определялись границы области наступления автобалансировки – особые критические скорости вращения ротора, при переходе через которые наступает или исчезает автобалансировка, переходные процессы не изучались. В работе [2] в рамках плоской модели ротора на изотропных опорах с двухмаятниковым (двухшаровым) АБ впервые аналитически показано, что (особые) критические скорости вращения ротора при учете невеличкості маси КГ могут распадаться на нечетное число (особых) критических скоростей, причем величины этих скоростей могут возрастать пропорционально дробной степени малого параметра, то есть стремительно. В работах [3, 4], в рамках плоской модели ротора на изотропных опорах, уравниваемого многошаровым (многомаятниковым) АБ была впервые введена минимальная совокупность обобщенных координат (ОК), описывающих процесс автобалансировки, не зависящая от числа КГ, что позволило распространить результаты, полученные для двухшаровых АБ на многошаровые. В работе [4] впервые изложена обобщенная теория уравнивания роторов пассивными АБ с твердыми КГ. В ней впервые установлены формы КГ, способных уравновесить ротор, классифицированы имеющиеся и предложены новые АБ, получены универсальные условия уравнивания АБ любого типа гибких и жестких роторов, совершающих различные движения. При этом результаты для роторов, совершающих неплот-

ские движения, были получены в предположении малости массы КГ по сравнению с массой ротора. В работах [5,6] было впервые аналитически показано, что на установившихся режимах движения ротора с АБ образуется соответствующий составной ротор и именно его массо-инерционные характеристики, а не характеристики ротора, определяют в приближенной – квазистатической постановке задачи, величины (особых) критических скоростей.

Следует так же отметить, что аналитические методы исследования процесса автобалансировки (моделирования роторных систем с АБ, составления дифференциальных уравнений движения и их анализа) наиболее полно изложены в работах [4-8].

Проведенный обзор литературы позволяет заключить, что задачи об уравнивании ротора пассивными АБ при неплоском движении ротора решены приближенно, причем допущение о малости массы КГ и ДМ по сравнению с массой ротора вводится еще на этапе составления дифференциальных уравнений движения системы «ротор-АБ».

Постановка задачи. Целью данной работы является: получение дифференциальных уравнений пространственного движения механической системы «ротор на двух упруго-вязких опорах – АБ с КГ большой массы» и замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающей устойчивость основных движений системы (в которых АБ уравнивает ротор и они вращаются как одно целое вокруг продольной оси ротора); установление влияния на эти уравнения немалости массы КГ АБ. Получение указанных систем дифференциальных уравнений является необходимой предпосылкой для дальнейшего, более точного аналитического решения задач автоматической балансировки. При решении поставленной задачи частично воспроизводятся выкладки, проведенные в работе [8], но в предположении немалости массы АБ и ДМ в сравнении с массой ротора. Полученные таким образом уточненные уравнения сравниваются с известными.

Физическая модель механической системы (МС) «ротор-АБ» [8]. Ротор массой M_r насажен на жесткий невесомый или весомый вал, масса которого отнесена к массе ротора (рис. 1). Вал установлен на двух упруго-вязких опорах и имеет возможность совершать вместе с ротором пространственное движение. Скорость вращения ротора ω постоянна. Опоры в общем случае неодинаковы и имеют анизотропные упруго-демпферные свойства, характеризуемые, соответственно, коэффициентами жесткости $c_{Lx}, c_{Ly}, c_{Rx}, c_{Ry}$ и демпфирования $h_{Lx}, h_{Ly}, h_{Rx}, h_{Ry}$. Смещениями ротора вдоль своей оси вращения пренебрегаем.

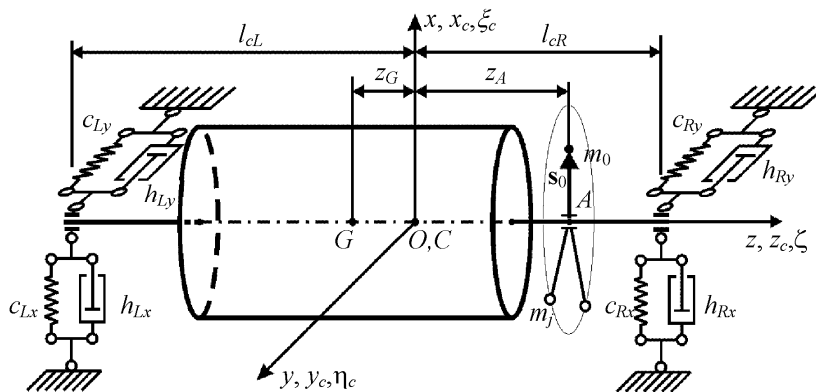


Рис. 1. Ротор на упруго-вязких опорах с АБ

Ротор полагаем осесимметричным с центром масс в точке G на оси его вращения. В плоскости $z=z_A$ расположен статический дисбаланс s , образованный точечной ДМ m_0 , которая находится на расстоянии R_0 от продольной оси ротора.

Кроме того, выделим на оси вращения точку C – общий центр масс системы «ротор-АБ» при основном режиме движения МС (идеальная авто-

балансировка). Обозначим через l_{CL}, l_{CR} – расстояния от точки C до левой и правой опор, причем эти величины считаются положительными в случае межопорного расположения ротора.

Для описания пространственного движения ротора с АБ введем следующие системы координат.

S_{xyz} – неподвижная система координат с началом в точке C , которая находится на оси вращения ротора, находящегося в статическом равновесии; ось z направлена вдоль оси вала ротора,

находящегося в состоянии статического равновесия; ось x направлена в сторону начального направления вектора дисбаланса s , а ось y направлена так, что система координат – правая.

$Cx_c y_c z_c$ – поступательно-подвижная система координат, перемещающаяся вместе с точкой C , оси которой остаются параллельными осям системы $Oxyz$.

$Cu_c v_c w$ – поворотно-подвижная система координат, жестко связанная с осью вращения ротора и отклоненная от системы $Cx_c y_c z_c$ на углы Резаля α и β ; оси u_c и v_c постоянно находятся в плоскости поперечного сечения ротора, но не вращаются с ним.

$C\xi_c \eta_c \zeta$ – подвижная система координат, жестко связанная с вращающимся ротором и с началом в точке C ; ось $\zeta=w$ это ось собственного вращения ротора; направление оси ξ_c совпадает с направлением вектора статического дисбаланса s .

Модель пространственного движения ротора приведена на рис. 2.

В начальном положении статического равновесия МС все указанные координатные оси совпадают. Далее сначала осуществляется поступательное движение ротора вместе с точкой C в положение (x_c, y_c, z_c) , после которого система координат $C\xi_c \eta_c \zeta$ занимает промежуточное положение $Cx_c y_c z_c$ (рис. 2, а). Потом происходят повороты ротора вокруг точки C на углы Резаля α и β (рис. 2, б), после чего оси системы $Cx_c y_c z_c$ переходят в оси $Cu_c v_c w$. Последним происходит поворот ротора вокруг продольной оси вращения ζ на угол ωt (рис. 2, в), после чего оси системы $Cu_c v_c w$ переходят в оси $C\xi_c \eta_c \zeta$.

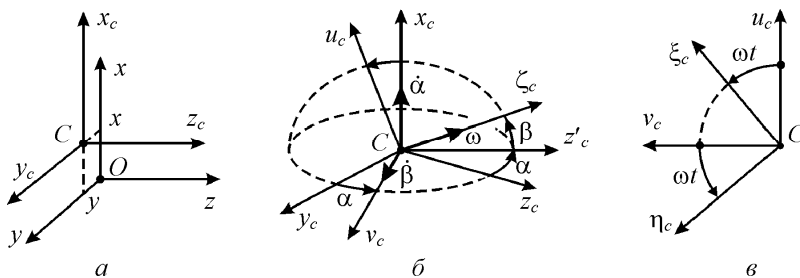


Рис. 2. Кинематика движения ротора

Для описания пространственного движения собственно ротора будем также использовать подвижные системы координат $Gx_G y_G z_G$, $Gu_G v_G w$ и $C\xi_G \eta_G \zeta$ с началом в точке G , которые аналогичны описанным выше координатным осям $Cx_c y_c z_c$, $Cu_c v_c w$ и $C\xi_c \eta_c \zeta$.

АБ прикреплен к ротору в точке A (плоскость $z=z_A$). АБ состоит из n КГ, которые моделируются материальными точками. Масса j -го КГ равна m_j и он имеет свободу движения относительно ротора по круговой траектории радиуса R_j с центром в точке A на оси ζ вращения ротора в плоскости перпендикулярной к этой оси в данной точке. Движение одного КГ не препятствует движению других КГ.

Массы КГ m_j , $j=1,2,...,n$ и ДМ m_0 полагаем немалыми величинами, которые могут быть сопоставимыми с массой ротора M_r .

Абсолютное движение j -го КГ будем рассматривать как сложное движение, представляющее собой сумму двух движений: переносного поступательного движения вместе полюсом в точке A крепления АБ к ротору и относительного поворотно-вращательного движения КГ относительно полюса A . Для геометрического описания подобного сложного движения введем системы координат $Ax_A y_A z_A$, $Au_A v_A w$ и $A\xi_A \eta_A \zeta$, связанные с точкой A и плоскостью АБ (рис. 3 а, б). Эти системы координат аналогичны описанным выше координатным осям $Cx_c y_c z_c$, $Cu_c v_c w$ и $C\xi_c \eta_c \zeta$.

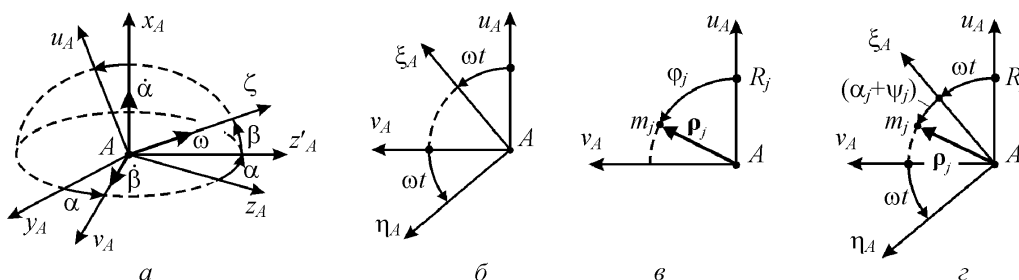


Рис. 3. Кинематика движения плоскости АБ, КГ и ДМ

Текущее положение отдельного КГ в плоскости АБ будем определять абсолютным углом φ_j (рис. 3, в) или относительным углом ψ_j (рис. 3, г), которые связаны между собой соотношением:

$$\varphi_j = \omega t + \alpha_j + \psi_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где α_j – постоянная величина.

Относительному движению КГ препятствует сила вязкого сопротивления $F_j^{(c)} = h_j u_j$, $j=1,2,\dots,n$, где h_j – коэффициент силы вязкого сопротивления, u_j – модуль относительной скорости КГ. Силой тяжести, действующей на систему, – пренебрегаем.

Механическая система имеет $N_s=(4+n)$ степеней свободы. Для однозначного описания движения всей МС выбираем следующий набор ОК:

$$\{q\} = (x_c \ y_c \ \alpha \ \beta \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_n)^T, \quad (2)$$

где x_c, y_c – текущие координаты точки С на оси ротора; α, β – текущие угловые отклонения оси вращения ротора.

При выводе уравнений движения МС будем полагать, что ротор в своем движении совершает малые отклонения от положения статического равновесия, т.е. вводится допущение о малости ОК ротора:

$$|x_c|, |y_c|, |\alpha|, |\beta| \ll 1, \quad |\dot{x}_c|, |\dot{y}_c|, |\dot{\alpha}|, |\dot{\beta}| \ll 1. \quad (3)$$

Подчеркнем, что при этом не вводится допущение о малости ОК КГ АБ и их производных, что расширяет область применимости полученных далее уравнений движения.

Поперечные смещения точек А и G, находящихся на оси ротора, выражаются через выбранные ОК следующим образом:

$$\begin{aligned} x_G(x_c, \beta) &\approx x_c + z_G \beta; & y_G(y_c, \alpha) &\approx y_c - z_G \alpha; \\ x_A(x_c, \beta) &\approx x_c + z_A \beta; & y_A(y_c, \alpha) &\approx y_c - z_A \alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

где z_G и z_A – постоянные продольные координаты указанных точек (с учетом знака).

Учитывая, что начало неподвижной системы координат S_{xyz} выбрано в общем центре масс, справедливо следующее соотношение между z_G и z_A :

$$M_r z_G + m_\Sigma z_A = 0 \quad \text{или} \quad z_G = -\frac{m_\Sigma}{M_r} z_A, \quad (5)$$

где $m_\Sigma = m_0 + \sum_{j=1}^n m_j = \sum_{j=0}^n m_j$ – суммарная масса всех КГ АБ и ДМ.

Дифференциальные уравнения движения КГ.

Кинетическая энергия одного КГ:

$$T_j = m_j \{v_j\}^2 / 2 = m_j (\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) / 2, \quad (6)$$

где $\{v_j\} = \{\dot{r}_j\}$ – вектор скорости КГ в неподвижной системе координат, определяемый как производная по времени от вектора координат КГ $\{r_j\} = (x_j \ y_j \ z_j)^T$.

Получим выражения для координат $\{r_j\}$ КГ, совершающего сложное пространственное движение. Для этого воспользуемся указанным выше подходом и введенным набором подвижных систем координат. Компенсирующий груз совершает круговое движение в подвижной плоскости $Au_A v_A$ вокруг центра А с радиусом R_j . В произвольный момент времени j -й КГ имеет следующие координаты в подвижной системе $Au_A v_A w$ (см. рис. 3):

$$\{r_j^{uv}\} = \{R_j \cos \varphi_j, R_j \sin \varphi_j, 0\}^T. \quad (7)$$

Координаты этой же точки в системе $Ax_A y_A z_A$ определяется на основе матрицы перехода, которая с точностью до величин второго порядка малости включительно имеет вид:

$$[A_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 - \beta^2 / 2 & 0 & \beta \\ \alpha \beta & 1 - \alpha^2 / 2 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 - (\alpha^2 + \beta^2) / 2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Повышенная точность представления матрицы перехода вызвана тем, что в данной работе КГ не считаются малыми величинами.

С учетом (7), (8) и рис.3 координаты j -го КГ в системе координат $Cxyz$ в произвольный момент времени с точностью до величин второго порядка малости включительно имеют вид:

$$\{r_j\} = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + [A_{\alpha\beta}] \begin{bmatrix} R_j \cos \varphi_j \\ R_j \sin \varphi_j \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + R_j \begin{bmatrix} (1 - \beta^2 / 2) \cos \varphi_j \\ \alpha \beta \cos \varphi_j + (1 - \alpha^2 / 2) \sin \varphi_j \\ -\beta \cos \varphi_j + \alpha \sin \varphi_j \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где z_A – постоянная осевая координата точки A крепления АБ к ротору (с учетом знака).

Подставив далее (9) в (6), после преобразований получаем кинетическую энергию j -го КГ:

$$T_j \approx \frac{1}{2} m_j R_j^2 \dot{\varphi}_j^2 + \frac{1}{2} m_j (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + m_j R_j \dot{\varphi}_j (\dot{y}_A \cos \varphi_j - \dot{x}_A \sin \varphi_j) + \frac{1}{2} m_j R_j^2 [(\dot{\alpha} \sin \varphi_j - \dot{\beta} \cos \varphi_j)^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \varphi_j], \quad j = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Отметим, что здесь кинетическая энергия выражена через геометрические координаты x_A, y_A точки крепления АБ к ротору, которые, в свою очередь, зависят только от ОК ротора, согласно (4), т.е. $x_A = x_A(x_c, \beta)$, $y_A = y_A(y_c, \alpha)$.

Диссипативная функция Релея для КГ:

$$\Phi_j = \frac{1}{2} h_j u_j^2 = \frac{1}{2} h_j R_j^2 (\dot{\varphi}_j - \omega)^2, \quad (11)$$

где $u_j = R_j (\dot{\varphi}_j - \omega)$ – скорость j -го КГ относительно ротора; h_j – коэффициент вязкого сопротивления движению КГ в АБ.

Уравнения Лагранжа II рода для КГ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_j}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) - \frac{\partial T_j}{\partial \varphi_j} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial \varphi_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Дифференциальные уравнения движения КГ получаем, подставляя в уравнения Лагранжа выражения (10) и (11):

$$m_j R_j^2 \ddot{\varphi}_j + h_j R_j^2 (\dot{\varphi}_j - \omega) - m_j R_j (\ddot{x}_A \sin \varphi_j - \ddot{y}_A \cos \varphi_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Уравнения движения ротора.

Найдем кинетическую энергию системы.

Кинетическая энергия ротора равна сумме кинетической энергии $T_r^{(G)}$ поступательного движения ротора вместе с его центром масс G и кинетической энергии $T_r^{(\omega)}$ его вращательного движения вокруг центра масс:

$$T_r = T_r^{(G)} + T_r^{(\omega)} = \frac{1}{2} M_r \{v_G\}^2 + \frac{1}{2} \{\omega_r\}^T [J_r] \{\omega_r\}, \quad (13)$$

где

$$\{r_G\} \approx \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix}; \quad \{v_G\} = \{\dot{r}_G\} \approx \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \{\omega_r\} \approx \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \omega + \dot{\alpha}\beta \end{bmatrix}; \quad [J_r] = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & A_r & 0 \\ 0 & 0 & C_r \end{bmatrix};$$

$\{r_G\}$, $\{v_G\}$ – радиус-вектор точки G и её скорость в неподвижной системе координат;

$\{\omega_r\}$ – вектор угловой скорости вращения ротора;

$[J_r]$ – тензор инерции ротора в проекциях на оси подвижной системы Gu_Gv_Gw .

Здесь геометрические координаты точки G являются функциями ОК ротора согласно (4), т.е. $x_G = x_G(x_c, \beta)$, $y_G = y_G(y_c, \alpha)$.

Тогда с точностью до величин второго порядка малости включительно получаем:

$$T_r \approx \frac{1}{2} M_r (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} A_r (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} C_r (\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta). \quad (14)$$

Кинетическая энергия АБ и ДМ:

$$T_\Sigma = \sum_{j=0}^n T_j, \quad (15)$$

где T_j – кинетическая энергия j -го КГ или ДМ.

После подстановки (10) в (15) кинетическая энергия всего АБ и ДМ с точностью до второго порядка малости включительно:

$$T_\Sigma \approx \frac{1}{2} m_\Sigma (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n m_j R_j \left[R_j \dot{\phi}_j^2 + 2\dot{\phi}_j (\dot{y}_A \cos \phi_j - \dot{x}_A \sin \phi_j) \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \left[(\dot{\alpha} \sin \phi_j - \dot{\beta} \cos \phi_j)^2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \phi_j \right], \quad (16)$$

где $m_\Sigma = \sum_{j=0}^n m_j$ – суммарная масса всех КГ АБ и ДМ.

Введем в использование суммарные массо-инерционные параметры, образуемые системой компенсирующих грузов АБ и ДМ – суммарные дисбаланс и тензор инерции автобалансира.

Текущий суммарный дисбаланс, образуемый всеми КГ АБ и ДМ, имеет проекции на поворотнo-подвижные оси Au_Av_A :

$$s_u = \sum_{j=0}^n m_j R_j \cos \phi_j; \quad s_v = \sum_{j=0}^n m_j R_j \sin \phi_j, \quad (17)$$

а на вращающиеся оси $A\xi_A\eta_A$:

$$s_\xi = \sum_{j=0}^n m_j R_j \cos(\alpha_j + \psi_j); \quad s_\eta = \sum_{j=0}^n m_j R_j \sin(\alpha_j + \psi_j). \quad (18)$$

Связь между (17) и (18):

$$s_u = s_\xi \cos \omega t - s_\eta \sin \omega t; \quad s_v = s_\xi \sin \omega t + s_\eta \cos \omega t. \quad (19)$$

Отметим также, что введенный здесь суммарный дисбаланс фактически определяет текущее положение общего центра масс всех КГ АБ и ДМ.

Суммарный тензор инерции, образуемый всеми КГ АБ и ДМ относительно осей Au_Av_Aw имеет вид:

$$J_{u_A}^{(AB)} = \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \sin^2 \phi_j; \quad J_{v_A}^{(AB)} = \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \cos^2 \phi_j; \quad J_{u_A v_A}^{(AB)} = \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \sin \phi_j \cos \phi_j; \\ J_w^{(AB)} = \sum_{j=0}^n m_j R_j^2; \quad J_{u_A w}^{(AB)} = \sum_{j=0}^n m_j z_A R_j \cos \phi_j = z_A s_u; \quad J_{v_A w}^{(AB)} = \sum_{j=0}^n m_j z_A R_j \sin \phi_j = z_A s_v. \quad (20)$$

Можно показать, что кинетическая энергия АБ и ДМ (16) с использованием введенных выше суммарных массо-инерционных характеристик (17) и (20) записывается в виде:

$$T_{\Sigma} \approx \dot{y}_A \dot{s}_v + \dot{x}_A \dot{s}_u + \frac{1}{2} m_{\Sigma} (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2} J_{u_A}^{(AB)} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_{v_A}^{(AB)} \dot{\beta}^2 - J_{u_A v_A}^{(AB)} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{1}{2} J_w^{(AB)} (\omega^2 + 2\omega \dot{\alpha} \beta) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 [\dot{\phi}_j^2 - \omega^2 + 2(\dot{\phi}_j - \omega) \dot{\alpha} \beta]. \quad (21)$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий ротора (14) и АБ (21). После некоторых преобразований получаем:

$$T = T_r + T_{\Sigma} \approx \frac{1}{2} M_r (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \dot{y}_A \dot{s}_v + \dot{x}_A \dot{s}_u + \frac{1}{2} m_{\Sigma} (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2} (A_r + J_{u_A}^{(AB)}) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (A_r + J_{v_A}^{(AB)}) \dot{\beta}^2 - J_{u_A v_A}^{(AB)} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{1}{2} (C_r + J_w^{(AB)}) (\omega^2 + 2\omega \dot{\alpha} \beta) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 [\dot{\phi}_j^2 - \omega^2 + 2(\dot{\phi}_j - \omega) \dot{\alpha} \beta]. \quad (22)$$

Придем теперь к координатам общего центра масс x_c, y_c , используя (4) с учетом равенства (5). Использование этих ОК ротора позволяет несколько упростить выражение для T и уравнения движения МС. После подстановок и группировки слагаемых получаем

$$T \approx \frac{1}{2} (M_r + m_{\Sigma}) (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + (\dot{y}_c - z_A \dot{\alpha}) \dot{s}_v + (\dot{x}_c + z_A \dot{\beta}) \dot{s}_u + \frac{1}{2} (A_r + J_{u_A}^{(AB)} + M_r z_G^2 + m_{\Sigma} z_A^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (A_r + J_{v_A}^{(AB)} + M_r z_G^2 + m_{\Sigma} z_A^2) \dot{\beta}^2 - J_{u_A v_A}^{(AB)} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{1}{2} (C_r + J_w^{(AB)}) (\omega^2 + 2\omega \dot{\alpha} \beta) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 [\dot{\phi}_j^2 - \omega^2 + 2(\dot{\phi}_j - \omega) \dot{\alpha} \beta]. \quad (23)$$

Введем далее в использование суммарные массо-инерционные характеристики всей МС «ротор–АБ».

Суммарная масса M_s и суммарный тензор инерции составного ротора (вместе с АБ и ДМ) относительно осей u_c, v_c, w , которые начинаются в точке C на продольной оси ротора, определяются выражениями:

$$M_s = M_r + m_{\Sigma}; \quad [J_C] = \begin{bmatrix} J_{u_c} & -J_{u_c v_c} & -J_{u_c w} \\ -J_{u_c v_c} & J_{v_c} & -J_{v_c w} \\ -J_{u_c w} & -J_{v_c w} & J_w \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где моменты инерции относительно осей:

$$J_{u_c} = A_r + J_{u_A}^{(AB)} + M_r z_G^2 + m_{\Sigma} z_A^2; \quad J_{v_c} = A_r + J_{v_A}^{(AB)} + M_r z_G^2 + m_{\Sigma} z_A^2; \quad J_{u_c v_c} = J_{u_A v_A}^{(AB)}; \quad J_w = C_r + J_w^{(AB)}; \quad J_{u_c w} = J_{u_A w}^{(AB)}; \quad J_{v_c w} = J_{v_A w}^{(AB)}. \quad (25)$$

Тогда окончательно кинетическая энергия механической системы (23) запишется в виде

$$T \approx \frac{1}{2} M_s (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + (\dot{y}_c - z_A \dot{\alpha}) \dot{s}_v + (\dot{x}_c + z_A \dot{\beta}) \dot{s}_u + \frac{1}{2} J_{u_c} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_{v_c} \dot{\beta}^2 - J_{u_c v_c} \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{1}{2} J_w (\omega^2 + 2\omega \dot{\alpha} \beta) + \Delta T, \quad (26)$$

где $\Delta T = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 [\dot{\phi}_j^2 - \omega^2 + 2(\dot{\phi}_j - \omega) \dot{\alpha} \beta]$ - составляющая кинетической энергии, не зависящая

от ОК x_c, y_c, α, β ротора а также от их производных и составляющих третьего порядка малости на основных движениях, поскольку

$$|\dot{\phi}_j - \omega| \ll 1, \quad |\ddot{\phi}| \ll 1.$$

Потенциальная энергия этой системы [8]

$$\Pi = \Pi_r = \frac{1}{2} (c_x x_c^2 + c_y y_c^2 + c_\alpha \alpha^2 + c_\beta \beta^2 - 2c_{x\beta} x_c \beta + 2c_{y\alpha} y_c \alpha), \quad (27)$$

где

$$c_x = c_{Lx} + c_{Rx}; \quad c_y = c_{Ly} + c_{Ry}; \quad c_\alpha = c_{Ly} l_{cL}^2 + c_{Ry} l_{cR}^2; \quad c_\beta = c_{Lx} l_{cL}^2 + c_{Rx} l_{cR}^2; \\ c_{x\beta} = c_{Lx} l_{cL} - c_{Rx} l_{cR}; \quad c_{y\alpha} = c_{Ly} l_{cL} - c_{Ry} l_{cR}.$$

Составляющая диссипативной функции Релея, зависящая от ОК ротора [8]:

$$\Phi_r = \frac{1}{2} (h_x \dot{x}_c^2 + h_y \dot{y}_c^2 + h_\alpha \dot{\alpha}^2 + h_\beta \dot{\beta}^2 - 2h_{x\beta} \dot{x}_c \dot{\beta} + 2h_{y\alpha} \dot{y}_c \dot{\alpha}), \quad (28)$$

где

$$h_x = h_{Lx} + h_{Rx}; \quad h_y = h_{Ly} + h_{Ry}; \quad h_\alpha = h_{Ly} l_{cL}^2 + h_{Ry} l_{cR}^2; \quad h_\beta = h_{Lx} l_{cL}^2 + h_{Rx} l_{cR}^2; \\ h_{x\beta} = h_{Lx} l_{cL} - h_{Rx} l_{cR}; \quad h_{y\alpha} = h_{Ly} l_{cL} - h_{Ry} l_{cR}.$$

Дифференциальные уравнения движения ротора выводятся с помощью известного формализма уравнений Лагранжа второго рода, с использованием выражений (26)-(28) и имеют вид:

$$M_s \ddot{x}_c + h_x \dot{x}_c + c_x x_c - h_{x\beta} \dot{\beta} - c_{x\beta} \beta - \ddot{s}_u = 0; \quad M_s \ddot{y}_c + h_y \dot{y}_c + c_y y_c + h_{y\alpha} \dot{\alpha} + c_{y\alpha} \alpha + \ddot{s}_v = 0; \\ J_{u_c} \ddot{\alpha} + (J_{u_c} + h_\alpha) \dot{\alpha} + c_\alpha \alpha - J_{u_c v_c} \ddot{\beta} + (-J_{u_c v_c} + J_w \omega) \dot{\beta} + h_{y\alpha} \dot{y}_c + c_{y\alpha} y_c - z_A \ddot{s}_v = 0; \\ J_{v_c} \ddot{\beta} + (J_{v_c} + h_\beta) \dot{\beta} + c_\beta \beta - J_{u_c v_c} \ddot{\alpha} - (J_{u_c v_c} + J_w \omega) \dot{\alpha} - h_{x\beta} \dot{x}_c - c_{x\beta} x_c + z_A \ddot{s}_u = 0. \quad (29)$$

Замкнутая система дифференциальных уравнений для исследования устойчивости основного движения. На основных движениях составной ротор уравновешен и вращается вокруг своей продольной оси и потому обобщенные координаты ротора и суммарного дисбаланса равны нулю:

$$x_c = y_c = 0, \quad \alpha = \beta = 0, \quad s_u = s_v = 0. \quad (30)$$

Как было показано в работах [3-8] устойчивость основных движений МС можно исследовать по этим обобщенным координатам вместо полного набора ОК МС (2). Поскольку система уравнений движения ротора (29), составленная относительно $x_c, y_c, \alpha, \beta, s_u, s_v$, не замкнута, то к ней еще необходимо добавить минимальное количество уравнений, являющихся комбинацией уравнений движения КГ.

Поскольку при учете немалости массы КГ их уравнения движения не меняются, то в качестве замыкающих уравнений можно использовать уравнения, полученные в работах [3,4,7,8]:

$$\ddot{s}_\xi + \frac{h}{m} \dot{s}_\xi + m \ddot{x}_A \sum_{j=1}^n \sin \theta_j \sin \alpha_j - m \ddot{y}_A \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \sin \alpha_j = 0; \\ \ddot{s}_\eta + \frac{h}{m} \dot{s}_\eta - m \ddot{x}_A \sum_{j=1}^n \sin \theta_j \cos \alpha_j + m \ddot{y}_A \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \cos \alpha_j = 0. \quad (31)$$

где $\theta_j = \omega t + \alpha_j$ и уравнения получены в предположении, что все КГ АБ имеют одинаковые параметры m и h (т.е. $m = m_j$; $h = h_j, j=1, \dots, n$), но радиусы R_j могут быть различными.

Таким образом, замкнутая система уравнений движения МС для исследования устойчивости основного движения (автобалансировки) имеет вид (29), (31).

Анализ влияния величины массы компенсирующих грузов на уравнения движения системы.

Полученные уравнения движения КГ (12) полностью совпали с уравнениями, полученными в работе [8] в предположении малости массы КГ в сравнении с массой ротора. Как и было установлено ранее [7,8] единственное влияние, которое оказывает ротор на уравнения движения КГ, со-

стоит во вхождении в эти уравнения ускорения точки A .

В случае малых масс КГ и ДМ уравнение движения ротора можно представить в виде [8]:

$$\begin{aligned} M_r \ddot{x}_c + h_x \dot{x}_c + c_x x_c - h_{x\beta} \dot{\beta} - c_{x\beta} \beta + \ddot{s}_u &= 0; \quad M_r \ddot{y}_c + h_y \dot{y}_c + c_y y_c + h_{y\alpha} \dot{\alpha} + c_{y\alpha} \alpha + \ddot{s}_v = 0; \\ A_r \ddot{\alpha} + h_\alpha \dot{\alpha} + c_\alpha \alpha + C_r \omega \dot{\beta} + h_{y\alpha} \dot{y}_c + c_{y\alpha} y_c - z_A \ddot{s}_v &= 0; \\ A_r \ddot{\beta} + h_\beta \dot{\beta} + c_\beta \beta - C_r \omega \dot{\alpha} - h_{x\beta} \dot{x}_c - c_{x\beta} x_c + z_A \ddot{s}_u &= 0; \end{aligned} \quad (32)$$

Как видим, если принять допущение о малости масс m_j по сравнению с массой ротора, то в первом приближении общая масса системы M_s становится равной массе ротора M_r , суммарный тензор инерции составного ротора $[J_C]$ не отличается от тензора инерции ротора $[J_r]$, а общий центр масс МС совпадает с центром масс ротора (точки C и G), т.е.

$$M_s = M_r + m_\Sigma \approx M_r; \quad z_G \approx 0;$$

$$\begin{aligned} J_{u_c} &= A_r + \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \sin^2 \varphi_j + M_r z_G^2 + m_\Sigma z_A^2 \approx A_r; \quad J_{v_c} = A_r + \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \cos^2 \varphi_j + M_r z_G^2 + m_\Sigma z_A^2 \approx A_r; \\ J_w &= C_r + \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \approx C_r; \quad J_{u_c v_c} = \sum_{j=0}^n m_j R_j^2 \sin \varphi_j \cos \varphi_j \approx 0; \quad J_{u_c w} \approx 0; \quad J_{v_c w} \approx 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Сравнение уравнений движения ротора в форме (29) с формой (32), позволяет установить следующие их качественное различие: в уточненные дифференциальные уравнения движения (29) не входят независимо массо-инерционные характеристики ротора, а входят массо-инерционные характеристики составного ротора, образованного ротором, АБ и ДМ.

В связи с этим на процесс автобалансировки, в том числе на условия наступления автобалансировки и скорость протекания переходных процессов влияют не характеристики ротора, а характеристики составного ротора. Следует так же отметить такой эффект, что осесимметричный ротор после добавления к нему дополнительных масс (КГ и ДМ) становится неосесимметричным составным ротором с неодинаковыми моментами инерции относительно его поперечных осей, что приводит к увеличению числа критических скоростей, изменению областей наступления автобалансировки и т.д.

Выводы. В результате выполненного анализа установлено, что при учете немалости массы КГ в АБ:

- дифференциальные уравнения движения КГ не изменяются и по-прежнему единственное влияние, которое оказывает ротор на уравнения движения КГ, состоит во вхождении в эти уравнения ускорения точки A крепления автобалансира к ротору;
- в дифференциальные уравнения движения ротора не входят независимо массо-инерционные характеристики ротора, а входят массо-инерционные характеристики составного ротора, образованного ротором, АБ и ДМ;
- на процесс автобалансировки, в том числе на условия наступления автобалансировки и скорость протекания переходных процессов, влияют не характеристики ротора, а характеристики составного ротора.

1. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы / В.П. Нестеренко. - Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. - 84 с. 2. Филимонович Г.Б. К устойчивости основного движения двухмаятникового автобалансира // Докл. НАН Украины, Сер.А.-1996. № 8. - С. 74-78. 3. Горбенко А.Н. Об устойчивости автобалансировки ротора с помощью шариков / А.Н. Горбенко // Проблемы прочности – 2003. – № 3 (363). – с. 120-129. 4. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами / Г.Б. Филимонович. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с. 5. Філімоніхіна І.І. Узагальнений емпіричний критерій стійкості основного руху і його застосування до ротора на двох осесиметричних пружних опорах / І.І. Філімоніхіна, Г.Б. Філімоніхін // машинознавство. –2007. №3, С.

22-27. 6. Філімоніхіна І.І. Застосування функції Гамільтона до визначення умов зрівноваження автобалансирами ротора, здійснюючого просторовий рух / І.І. Філімоніхіна // Збірник наукових праць КНТУ, 2007. Вип. №18, С. 34-41. 7. Горбенко А.Н. Основы общего подхода к анализу устойчивости роторных машин с пассивным автобалансиром / А.Н. Горбенко; Керченский гос. морской технол. ун-т. – Керчь, 2008. – 52с. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 07.07.2008, №108 – Ук2008. 8. Філімоніхін Г.Б. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансир / Г.Б.Філімоніхін, В.В.Гончаров // Збірник наукових праць КНТУ, 2009, Вип. 22, с. 357–363.

Библиографическое описание статьи:

Филимонихин Г.Б., Горбенко А.Н. Влияние массы шаров автобалансира на структуру уравнений движения двухопорного ротора // Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении: Украинский межведомственный научно-технический сборник. – Львов: Национальный университет "Львовская политехника", 2011. – Вып. 45. – с. 478-488.